Université de Caen **2005-2006**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **2^e^ semestre**

Algèbre
Feuille n° 1

Quelques rappels de cours :

- **Définition.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $F \subset E$ une partie *non vide*. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si pour tous u, $v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.
- **Définition.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que (u_i) est *génératrice* si tout vecteur $v \in E$ peut s'exprimer sous la forme $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ avec λ_1, $\dots$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. On dit que (u_i) est *libre* si $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall\, i\ \lambda_i = 0$. On dit que (u_i) est une *base* si elle est libre et génératrice.
- **Théorème.** Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors (u_i) est une base **ssi** elle est génératrice **ssi** elle est libre.
- **Définition.** Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application. On dit que f est *linéaire* si pour tous u, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
- **Définition.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le *noyau* de f est le sous-espace de E défini par $\operatorname{Ker} f = \{u \in E \mid f(u) = 0\}$. L'*image* de f est le sous-espace de F défini par $\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in E\}$.
- **Théorème.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.
- **Notation.** On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à n. Si E et F sont deux ensembles, on note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

I. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ll}
E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}\ ; & E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}\ ; \\
E_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est dérivable}\}\ ; & E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}\ ; \\
E_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante}\}\ ; & E_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}\ ; \\
E_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0\}\ ; & E_8 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 0\}\ .
\end{array}$$

II. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$.

1. Quelle est la dimension de E ? et celle de F ? Montrer que E et F sont égaux.
2. Quel est l'ensemble des couples (x, y) tels que le vecteur $v = (-2, x, y)$ appartienne à E ?

III. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? génératrices ? Donner, dans chaque cas, une relation de dépendance linéaire s'il en existe une, ainsi qu'une sous-famille libre de cardinal maximal.

1. Dans $\mathbb{R}^2$: $((3, 2), (3, -1), (5, -2))$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $((2, 3, 1), (-1, 5, 3))$.
3. Dans $\mathbb{R}_3[X]$: $(3 + 3X + X^2 + X^3, 1 - X - X^2 + X^3, -1 - X + X^2 + X^3, 3 - 3X + X^2 - X^3)$.

IV. Soit (S) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (S) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

V. Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E et calculer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$; $u = (1, 3, 2)$.
2. $E = \mathbb{C}^3$; $\mathcal{B} = ((1, -1, i), (-1, i, 1), (i, 1, -1))$; $u = (1 + i, 1 - i, i)$.
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = (1 + X + X^2 + X^3, X + X^2 + X^3, X^2 + X^3, X^3)$; $u = (X + 1)^2$.

VI. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x + y, 4x - y)\\
&f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (xy, x, y)\\
&f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 2x - y + z, -5y + z)\\
&f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))\\
&f_5 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{3n})_{n\in\mathbb{N}},\\
&f_6 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)P(1)\\
&f_7 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto P'
\end{aligned}$$

Pour les applications linéaires f trouvées ci-dessus, déterminer le noyau et le rang de f.

VII. Dans le plan vectoriel rapporté à une base (i, j) on définit l'application linéaire f par :

$$f(i) = 2i - 3j, \quad f(j) = i - 2j.$$

1. Exprimer les coordonnées de $f(u)$ en fonction de celles de u, dans la base (i, j).
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = u$ est une droite.
   Déterminer un vecteur directeur i' de cette droite.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = -u$ est une droite.
   Déterminer un vecteur directeur j' de cette droite.
4. Montrer que (i', j') est une base.
   Donner l'expression de f dans cette base, comme à la première question.
5. Soit $v = i' + 2j'$. Placer i', j', v et $f(v)$ sur un dessin.

VIII. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_m : E \to E,\ P \mapsto X^2P'' - (2m - 1)XP' + m^2P.$$

1. Montrer que l'application f_m est linéaire.
2. Calculer $f_m(X^i)$ lorsque $i = 0, 1, 2$.
3. En déduire une base de $\operatorname{Im} f_m$ et $\operatorname{Ker} f_m$ en fonction du paramètre m.
4. Lorsque f_m est un automorphisme, donner sa bijection réciproque.

IX. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui suit :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x + 3y - 3z, 4y, -3x + 3y + z)$$

Soit F et G les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = f - 4\mathrm{Id}$ et $G = f + 2\mathrm{Id}$.

1. Exprimer $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
2. Donner une base de $\operatorname{Ker} F$ et une base de $\operatorname{Ker} G$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Ker} G$.
4. En utilisant la question précédente, montrer que $f^2 - 2f - 8\mathrm{Id} = 0$.
   (Indication : on pourra remarquer que $f^2 - 2f - 8\mathrm{Id} = F \circ G = G \circ F$.)

X. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

XI. Soit les applications linéaires

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, y + 2z)\\
&g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x - y, x - 2y, x - 3y).
\end{aligned}$$

1. Donner, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et g.
2. Calculer les matrices de $g \circ f$ et de $f \circ g$ dans les bases précédentes.
   En déduire l'expression de $(g \circ f)(x, y, z)$ et de $(f \circ g)(x, y)$.
3. Calculer le rang des applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$.
   Lorsque c'est possible, donner la matrice de leur inverse.

XII. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A'^n pour tout n.
3. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$.
4. Calculer les coordonnées dans la base canonique du vecteur $f^n(u)$.