Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
2^{e} semestre

Algèbre
Feuille n^{o} 2

Quelques rappels de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

- **Définition.** On dit que le réel λ est *valeur propre* de f s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ *non nul* tel que $f(v) = \lambda v$. On dit alors que v est un *vecteur propre* de f associé à λ. On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
- **Définition.** Le *sous-espace propre* de f associé à un réel λ est $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$. Le *polynôme caractéristique* de f est $P_f = \det(f - X\mathrm{Id})$.
- **Définition.** On dit qu'un polynôme réel P de degré n est *scindé* s'il a n racines réelles comptées avec multiplicité. On dit que P est *à racines simples* si toutes ses racines sont simples. On note $\mathrm{mult}_\lambda(P)$ la multiplicité d'une racine λ de P.
- **Proposition.** Les racines du polynôme caractéristique P_f sont exactement les valeurs propres de f. Son terme dominant est $(-X)^n$. Sa valeur en 0 est le déterminant de f.
- **Proposition.** Deux sous-espaces propres $E_\lambda(f)$, $E_\mu(f)$ avec $\lambda \neq \mu$ sont en somme directe.
- **Théorème.** Pour toute valeur propre λ de f on a $\dim E_\lambda(f) \leq \mathrm{mult}_\lambda(P_f)$. De plus f est diagonalisable si et seulement si P_f est scindé et l'inégalité précédente est une égalité pour toutes les valeurs propres de f.
- **Corollaire.** Si P_f n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable. Si P_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

I. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
4. Trouver une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

II. Soit a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 4a-2 & -2 & 3 \\ 3a+1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. On prend $a = 0$.
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de f.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction $(x \mapsto P_f(x))$.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Réaliser la même étude dans le cas $a = -1$.

III. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
3. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
4. Trouver une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
5. Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

IV. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre E_1.
5. On pose $u_3 = (-1, 1, 0)$. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Écrire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

V. On considère deux suites (u_n), (v_n) définies par les valeurs u_0, v_0 et le système de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = 11u_n - 18v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 10v_n. \end{cases}$$

On pose $X_n = \binom{u_n}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que le système ci-dessus s'écrive $X_{n+1} = AX_n$.
2. Trouver une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer qu'on a $X_n = PD^nP^{-1}X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On suppose que $u_0 = 7$ et $v_0 = 4$. Calculer u_n et v_n pour tout n.
   Sans calculer P^{-1}, on pourra chercher un vecteur colonne Y_0 tel que $PY_0 = X_0$.