Université de Caen — **2005-2006**
UFR de Sciences — **L2 MASS**
Mathématiques — **2^{e} semestre**

ALGÈBRE
FEUILLE N° 4

Quelques rappels de cours. Soit E un espace euclidien.

- On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *symétrique* si on a ${}^tA = A$, *orthogonale* si on a ${}^tAA = I_n$.
- On dit qu'une application linéaire $f \in L(E)$ est *symétrique* si on a $f(x) \cdot y = x \cdot f(y)$ pour tous x, $y \in E$, cela équivaut au fait que la matrice de f est symétrique dans toute base orthonormale de E.
- On dit qu'une application linéaire $f \in L(E)$ est une *isométrie* si on a $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, cela équivaut au fait que la matrice de f est orthogonale dans toute base orthonormale de E.
- Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. La *projection sur F parallèlement à G* est l'endomorphisme de E qui à tout $x \in E$ associe le vecteur $y \in F$ correspondant.
- La *projection orthogonale* p_F sur un sous-espace F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, où $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F\ y \cdot x = 0\}$ est l'*orthogonal* de F. C'est une application linéaire symétrique.
- La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'endomorphisme $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$. C'est une isométrie et une application linéaire symétrique.
- On appelle *rotation* du plan ou de l'espace une isométrie de déterminant positif.
- Le *produit scalaire usuel* sur $\mathbb{R}^n$ est la forme bilinéaire définie par $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- Théorème : toute application linéaire symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

I. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

1. Montrer que la forme bilinéaire associée à q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3) — cf feuille 3.
2. Soit P le plan orthogonal au vecteur $(1, 1, 0)$. Quel est le projeté orthogonal de e_1 sur P ?
3. Calculer les coordonnées des projetés orthogonaux de e_2 et e_3 sur P.
4. Écrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P.
   Est-elle symétrique ? Pourquoi ? Quelles sont ses valeurs propres ?

II. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 8xy + 8xz - 6yz.$$

On peut vérifier que la forme bilinéaire symétrique associée à q est définie-positive ; dans le reste de l'exercice on munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire. Soit P le plan d'équation $z = 0$. On note p la projection orthogonale sur P, s la symétrie orthogonale par rapport à P, p' la projection orthogonale sur $P^\perp$.

1. Donner une base de P puis un vecteur directeur unitaire de $P^\perp$.
2. Exprimer p et s en fonction de p'.
3. Déterminer $p'(e_1)$ et $p'(e_2)$ sans calcul, puis calculer $p'(e_3)$.
4. Écrire les matrices dans la base canonique de p', puis de p et s.
5. Montrer, analytiquement puis géométriquement, que l'ensemble des vecteurs $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = 1$ et $s(v) \perp v$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

III. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
2. f est-elle une projection orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$?
3. Montrer que la forme quadratique suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 6xy + 2xz - 2yz.$$

4. Montrer que f est une projection orthogonale si on munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire.
5. Donner une autre forme quadratique q pour laquelle ce résultat reste valable.

IV. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $v = (3, 1, 2)$.

1. Trouver une équation puis une base orthonormale de $D^\perp$.
2. Calculer les projetés orthogonaux de $e_1 = (1, 0, 0)$ sur D et sur $D^\perp$.
3. Écrire la matrice dans la base canonique des projections orthogonales p_D, $p_{D^\perp}$ sur D et $D^\perp$.
4. Vérifier que $p_D + p_{D^\perp} = \mathrm{Id}$.

V. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0. \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Quelle est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport à P ?

VI. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$u_1 = (2, 1, 0, 2), \quad u_2 = (0, 1, 0, 1), \quad u_3 = (2, 1, 3, 1), \quad u_4 = (1, 1, 1, 1).$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3, u_4) selon le procédé de Gram-Schmidt.
3. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs u_1 et u_2.
   Trouver la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P.

VII. On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée (et orientée) par le vecteur $v = (1, -2, 2)$.

1. Trouver une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur appartient à D.
2. Quelles sont les matrices dans la base canonique de
   (a) la symétrie orthogonale par rapport à D ?
   (b) la rotation d'axe D et d'angle $\pi/2$?
   (c) la rotation d'axe D et d'angle $2\pi/3$?

VIII. Soit a un paramètre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & -a-2 & a-1 \\ -a-2 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & a+2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est diagonalisable.

2. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
   On fera apparaître deux 0 sur la 2^e ligne en opérant sur les lignes et les colonnes.
3. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il une symétrie ?
4. Trouver une base de vecteurs propres pour f lorsque $a = 0$.

IX. Compléter la matrice suivante en une matrice de rotation

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Y a-t-il plusieurs solutions ? Déterminer l'axe et le cosinus de l'angle des rotations obtenues.

X. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f a une unique valeur propre que l'on déterminera.
3. Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que u_1 est vecteur propre de f.
4. Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?
5. Montrer qu'il existe une unique rotation r et une unique symétrie orthogonale s par rapport à un plan telles que $f = r \circ s = s \circ r$. Préciser l'axe et l'angle de r.