Université de Caen **2005-2006**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **2$^{\text{e}}$ semestre**

Analyse
Feuille n$^{\text{o}}$ 1

Quelques rappels de cours :

- **Définition.** La *boule ouverte* de centre x_0 et rayon r dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble $B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$. La *boule fermée* de centre x_0 et rayon r dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble $[x_0 - r, x_0 + r]$.
- **Définition.** Un *ouvert* de $\mathbb{R}$ est une partie $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$ il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \mathcal{O}$. Un *fermé* de $\mathbb{R}$ est une partie $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ dont le complémentaire est un ouvert.
- **Propriété.** Une partie $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ est fermée si et seulement si toute suite à valeurs dans $\mathcal{F}$ et qui converge dans $\mathbb{R}$ a sa limite dans $\mathcal{F}$.
- **Propriété.** Une intersection finie et une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts. Une intersection quelconque et une réunion finie de fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés.

I. Soit $u_0 \in]-2, +\infty[$. On pose $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier, suivant la valeur de u_0, la monotonie de la suite (u_n).
2. Montrer que dans tous les cas, elle converge, et expliciter sa limite.

II. Soit $u_0 \in]0, +\infty[$. On pose $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 < u_{n+1} < u_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{1 + u_n}$ est convergente.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{u_n}{1 + u_0} \leq \frac{u_n}{1 + u_n}.$$
En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

III. La terminologie rappelée plus haut est cohérente :

1. Montrer qu'une boule ouverte dans $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une boule fermée dans $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
3. Que peut-on dire d'un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite ?

IV. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$	2. $\{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x^2 - 1\rvert \leq 2\}$
3. $[2, 3] \cup \{0\}$	4. $]-3, 4[\cup [2, 5[$
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \geq \frac{1}{3}\}$	6. $\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
7. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x - E(x) < \frac{1}{2}\}$	8. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

V. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *adhérence* de A l'intersection de tous les fermés qui contiennent A, et on la note $\bar{A}$.

1. Montrer que $\bar{A}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ qui contient A. Que vaut $\bar{A}$ si A est fermé ?
2. Soit A' une autre partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \subset A' \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{A}'$. Que peut-on dire de la réciproque ?
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est dans $\bar{A}$ si et seulement si toute boule ouverte de centre x et de rayon non nul rencontre A. *On pourra raisonner par contraposée.*

VI. Déterminer l'adhérence des ensembles considérés à l'exercice IV.

VII. Expliciter les ensembles suivants :

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1+\frac{2}{n^2}, 3-\frac{1}{2n}\right[$.
2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[3-\frac{2}{n^2}, 3+\frac{2n}{n+1}\right]$.
3. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x \geq \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right\}$, $k = 1,\ 2,\ 3$.
4. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\cos\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\ ,\ \cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right]$.