Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
2$^{\text{e}}$ semestre

ANALYSE
FEUILLE N$^{\text{O}}$ 10

Rappel de cours. Soit I,J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Si on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in I \times J$, alors f ne dépend pas de x : il existe $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x,y) = g(y)$ pour tout $(x,y) \in I \times J$.

I. Soit $E =]-1,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$.

1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que
$$\forall (x,y) \in E \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1.$$
Montrer qu'il existe une application $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(x,y) = x + g(y)$ pour tout $(x,y) \in E$.
2. Déterminer toutes les applications $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que
$$\forall (x,y) \in E \quad (x^2+y^2+1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xf(x,y) = 1.$$

II. Soit $E =]0,+\infty[^2$. On chercher à déterminer l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in E \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{1}$$
Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(u,v) = \big(u, \frac{u}{v}\big)$ pour tout $(u,v) \in E$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $g = f \circ \varphi : E \to \mathbb{R}$ sa composée avec φ.

1. Montrer que g est de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de g au point (u,v) en fonction de u, v et des dérivées partielles de f.
2. En déduire qu'on a, pour tout $(u,v) \in E$ et $(x,y) = \varphi(u,v)$:
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$
3. Montrer que f vérifie (1) si et seulement si g vérifie l'équation suivante :
$$\forall (u,v) \in E \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0.$$
Quelle propriété de φ utilise-t-on ?
4. Montrer que f est solution de (1) si et seulement si il existe une fonction $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x,y) = h\big(\frac{x}{y}\big)$ pour tout $(x,y) \in E$.

III. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (u, v+u^2)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $g = f \circ \varphi$. Résoudre grâce à g l'équation
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

IV. Soit $E =]0,+\infty[^2$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(u,v) = \big(uv, \frac{v}{u}\big)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $g = f \circ \varphi$. Résoudre grâce à g l'équation
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$