Université de Caen **2005-2006**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **2^{e} semestre**

Analyse
Feuille n^{o} 2

Quelques rappels de cours :

- **Définition.** La *distance euclidienne* entre deux points $P = (x, y)$ et $P' = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ est
$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$
- **Définition.** La *boule ouverte* de centre P_0 et rayon r dans $\mathbb{R}^2$ est $B(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, P) < r\}$. La *boule fermée* de centre P_0 et rayon r dans $\mathbb{R}^2$ est $B'(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, P) \leq r\}$.
- **Propriété.** Une partie $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2$ est fermée si et seulement si toute suite à valeurs dans $\mathcal{F}$ qui converge dans $\mathbb{R}^2$ a sa limite dans $\mathcal{F}$. Une partie $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé.
- **Propriété.** Les seules parties de $\mathbb{R}^2$ qui sont à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ lui-même.

I. Soit x un point de $\mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

1. Montrer que $B(x, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $B'(x, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} B(0, 1 + \varepsilon) = B'(0, 1)$.
3. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0} B'(0, 1 - \varepsilon) = B(0, 1)$.
4. Soit (ρ_n) une suite strictement croissante de $\mathbb{R}^*$ non majorée.
Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(0, \rho_n)$ et $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(0, \rho_n)$. Que se passe-t-il si (ρ_n) est majorée ?

II. Déterminer la nature (ouvert, fermé ou ni l'un ni l'autre) des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$
4. $([2, 3] \cup \{0\}) \times [-1, 1]$
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x^2}\}$
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0\}$
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2 + y^2) \geq 0\}$
8. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$

III. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{x^2}{n}\}$.

1. Montrer que A_n est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$, grâce à des suites.
2. Soit $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Montrer que A n'est ni fermé ni ouvert.

IV. On rappelle que pour $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ les points de la boule ouverte $B(P, r)$ sont caractérisés par la propriété suivante :
$$(x, y) \in B(P, r) \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2.$$

1. Expliciter les ensembles :
$$\mathcal{O} = \bigcup_{r>0} B((0, r), r) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}' = \bigcup_{r>0} B'((0, r), r).$$
2. Déterminer la nature de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$: ouvert, fermé ou ni l'un ni l'autre.

V. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^2$. On définit $A+B$ par

$$A+B=\{x+y \mid (x,y)\in A\times B\}.$$

1. Montrer que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors $A+B$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que si A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et B est fini, alors $A+B$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

VI. On rappelle qu'un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ peut aussi être représenté par son affixe $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$.

1. Soit P, P' deux points de $\mathbb{R}^2$ d'affixes z, z'. Montrer que $d(P,P')=|z-z'|$.
2. Déterminer la nature des ensembles suivants de points de $\mathbb{R}^2$ donnés par leur affixe :

$$1.\ \{P(z)\mid |z-1|\leq 2\} \quad 2.\ \{P(z)\mid \mathrm{Re}((2+\mathrm{i})z)>3\} \quad 3.\ \{P(z)\mid e^z\in\mathbb{R}\}.$$

VII. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre ?

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y^2+z^3>1\}$
2. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sin(xyz)\in \left]0,\frac{1}{2}\right]\}$
3. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid e^{x+y+z}\in\mathbb{Z}<2\}$
4. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sin(x)+\cos(yz)<0\}$
5. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^3>y^2 \text{ et } z\geq 0\}$