Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
2^{e} semestre

Analyse
Feuille n^{o} 5

Rappels de cours. Soit n, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue.

- La *distance euclidienne* d'un point $P = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n$ à l'origine $O \in \mathbb{R}^n$ est donnée par
$$d(O,P)^2 = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2.$$
- On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *bornée* s'il existe un réel r tel que $d(O,P) \leq r$ pour tout $P \in A$.
- Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.
- Si $\mathcal{O}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.
- Si $\mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.
- Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $\varphi(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^p$.

I. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$ et $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq 0$.

1. Dessiner E.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in E$ on a $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 2$.
   En déduire que E est borné, puis compact.
3. Montrer que f est bien définie et continue sur E.
   Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
4. Calculer le maximum et le minimum de f sur E.

II. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ? compactes ?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1-x)\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2 < 1\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x^2+y^2) < \frac{1}{2}\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, t \in [-1,1]\ x = t^2, y = t^3\}$

III. On définit des fonctions continues f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par les formules $f(x,y) = x^2+y^2$ et $g(x,y) = x^2-y^2$.

1. Montrer que l'image réciproque de $[0,1]$ par f est bornée, mais pas celle de $[0,1]$ par g.
2. Exprimer sous forme d'intervalles les images directes de la boule ouverte $B(0,1)$ par f et g.
3. Montrer par des exemples que l'image réciproque d'un compact par une application continue peut être compacte ou non compacte.
4. Montrer par des exemples que l'image directe d'un ouvert par une application continue peut être ouverte ou non ouverte.
5. Soit A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue.
   Montrer que $f(A)$ et $f^{-1}(A)$ sont fermées.

IV. Soit $A = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B'\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right)$, où $B'(P,r)$ désigne la boule fermée de centre P et rayon r dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que A est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que A n'est pas compacte.

V. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{y}{x}\right| \ln\left(1 + \left|\dfrac{x}{y}\right|\right) & \text{si } \ xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ xy = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue sur $\mathcal{O}$.
2. Montrer que, pour tout $a \neq 0$, la fonction f est continue en $f(a,0)$.
3. Calculer $f(a,a)$ pour tout a. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?