Université de Caen **2005-2006**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **2^{e} semestre**

Analyse
Feuille n^{o} 6

Rappels de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f admet une *dérivée partielle* par rapport à x_i en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ si la fonction $g_i : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$ admet une dérivée en a_i, que l'on note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
- On dit que f est *différentiable* en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, appelée *différentielle* de f en a, telle que $f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
- Si f est différentiable en $a \in U$, alors elle est continue en a et admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables en a. De plus la différentielle en a est alors donnée par
$$L(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times h_i.$$
- Si f admet sur U des dérivées partielles par rapport à toutes les variables qui sont continues sur U, on dit que f est de *classe* C^1, et elle est alors différentiable en tout point de U.

I. Montrer, en appliquant la définition, que les applications suivantes sont différentiables en tout point :
$$f_1 : (x,y) \mapsto x^2 + xy^2 + x, \quad f_2 : (x,y,z) \mapsto x^2 + xy + z^2.$$
Expliciter la différentielle de f_1 en $(1,0)$ et celle de f_2 en $(1,0,1)$.
Indication : si p et q sont deux entiers tels que $p+q \geq 2$, alors $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^p k^q}{\|(h,k)\|} = 0$.

II. Montrer, en calculant des dérivées partielles, que les applications suivantes sont différentiables en tout point :
$$f_1(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2), \quad f_2(x,y,z) = \cos(xy) + x\sin(z).$$
Expliciter la différentielle de f_1 en $(1,0)$ et celle de f_2 en $(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

III. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, que l'on calculera.
Est-elle continue en $(0,0)$? (cf feuille n^{o} 6)

IV. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = |x| \sin(x^2 + y)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En quels points de $\mathbb{R}^2$ admet-elle des dérivées partielles par rapport à x ? à y ?

V. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Montrer successivement :
- que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
- que f admet l'application linéaire nulle comme différentielle en $(0,0)$,
- que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

VI. On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et on définit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \in U \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin U. \end{cases}$$

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe C^1 sur U.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   Indication : on rappelle que $|\sin t| \leq |t|$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que f a des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

VII. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = |x^3 - y^3|^{2/3}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 > 0\}$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 < 0\}$.
   (a) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que g est de classe C^1 sur U_1 et U_2.
3. Montrer que g n'est pas différentiable en $(1, 1)$.

VIII. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3 - \sin y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.
3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ pour tout x et en déduire que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
4. En considérant $f(x, -x)$, montrer que f n'est même pas différentiable en $(0, 0)$.