Université de Caen **2005-2006**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **2e semestre**

Analyse
Feuille n° 7

Rappels de cours. Soit n, $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une application de U dans $\mathbb{R}^p$.

- La fonction f est continue (respectivement différentiable) en un point de U si et seulement si c'est le cas des p fonctions composantes $f_1, \ldots, f_p$.
- Supposons f différentiable en $a \in U$. On appelle *matrice jacobienne* de f en a la matrice suivante :

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

- La différentielle de f en a est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dont la matrice dans les bases canoniques est $J_a(f)$.
- Soit g une application d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ contenant $f(a)$ dans $\mathbb{R}^q$. Si f est différentiable en a, et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a $J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g)J_a(f)$.
- En particulier, soit $x_1, \ldots, x_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications dérivables et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Si on pose $G(t) = g(x_1(t), \ldots, x_p(t))$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad G'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_p(t)) \times x_i'(t).$$

- Si la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est dérivable par rapport à x_j on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \quad \text{et,} \quad \text{si } i = j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big).$$

- Par récurrence, on dit que f est *de classe* C^k sur U si elle admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables qui sont de classe C^{k-1} sur U.
- Théorème de Schwarz. Si f est de classe C^2 sur U alors on a, pour tous i, $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les applications définies par

$$f(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = \sin(x^2 - y^2).$$

1. Calculer les matrices jacobiennes de f, g et $g \circ f$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déduire de la question précédente l'expression des dérivées partielles de la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \sin(4xy)$. Vérifier le résultat par un calcul direct.

II. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to R$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x, y) = f(y, x)$. Montrer que g est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

III. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(x + g(y^2, x)).$$

Montrer que f est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de g.

IV. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{x-y} & \text{si } \ x \neq y \\ 1 & \text{si } \ x = y. \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

V. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x,y,z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

Montrer que g est de classe C^1 et que pour tout réel t on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 0.$$

VI. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.
3. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

VII. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.
3. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

VIII. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

IX. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, xy) \ \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $g \circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g.