Université de Caen | **2005-2006**
UFR de Sciences | **L2 MASS**
Mathématiques | **2e semestre**

Analyse
Feuille n° 8

Rappels de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f admet un *minimum* (resp. un *maximum*) *global* en $a \in U$ si $f(a) \leq f(x)$ (resp. $\geq f(x)$) pour tout $x \in U$.
- On dit que f admet un *minimum* (resp. un *maximum*) *local* en $a \in U$ s'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant a tel que $f(a) \leq f(x)$ (resp. $\geq f(x)$) pour tout $x \in V \cap U$.

On suppose que U est un ouvert et que f est de classe C^1.

- Théorème des accroissements finis.
  Si le segment $[a, b]$ est inclus dans U, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = \mathrm{d}f(c) \cdot (b - a)$.

On suppose que U est un ouvert et que f est de classe C^2.

- On appelle *laplacien* de f la fonction $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. On dit que f est *harmonique* si $\Delta f = 0$.
- On appelle *matrice hessienne* de f en $a \in U$ la matrice $n \times n$ des dérivées partielles secondes :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}.$$

I. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x},$$
$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \ln((x - a)^2 + (y - b)^2).$$

II. Soit $u : \mathbb{R}^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $u(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et posons $F = f \circ u$.

1. Montrer que F est de classe C^2 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, r et θ.
3. Établir l'expression suivante du laplacien en coordonnées polaires :
$$(\Delta f)(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$
4. On prend $f(x, y) = x^2 - y^2$. Montrer que f est harmonique.
   Que vaut F dans ce cas ?
5. Montrer plus généralement — et directement — que les fonctions $F(r, \theta) = r^k \cos(k\theta)$ des coordonnées polaires (r, θ) sont harmoniques, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

III. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

On souhaite montrer que « f ne dépend pas de x ».

1. Fixons $y_0 \in \mathbb{R}$ et posons $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Déterminer f'_{y_0} et en déduire que f_{y_0} est constante.
2. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = g(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que g est de classe C^1.
3. Le résultat précédent reste-t-il valable pour une fonction $f : [a,a'] \times [b,b'] \to \mathbb{R}$?
4. On définit une fonction sur $(\mathbb{R} \times]-\infty, 0[) \cup (\mathbb{R}^* \times [0, +\infty[)$ en posant

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \text{ ou } x < 0 \\ y^2 & \text{si } y \geq 0 \text{ et } x > 0. \end{cases}$$

   Représenter le domaine de définition de f et vérifier que la dérivée partielle de f par rapport à x est nulle en tout point. Montrer que f est de classe C^1. Le résultat de la question 2 s'applique-t-il ?

IV. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que :

$$1. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{puis} \qquad 2. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

On utilisera le résultat de l'exercice précédent.

V. Calculer les matrices hessiennes des applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2), \quad g(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xy - 5yz, \quad h(x,y) = x^3y^2 + \cos(xy).$$

Que peut-on remarquer sur ces exemples ? Démontrer que c'est un fait général.

VI. Déterminer les extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0, 2\pi]$, des applications suivantes :

$$f(x) = x^2, \qquad h(x) = x^3 - x,$$
$$g(x) = x^3, \qquad k(x) = \sin x.$$

VII. Déterminer les extrema locaux et globaux de l'application f à valeurs réelles et définie sur la boule fermée $B'((0,0),1)$ par l'égalité $f(x,y) = x^2 + y^4$.