Licence 1 **2006-2007**
Mathématiques **EM11**
Groupe A

Devoir Maison

à rendre le lundi 23 octobre

Exercice 1. Soit a un réel positif.

a. Montrer par récurrence sur k qu'on a $(1+a)^k \geq 1 + ka$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

b. Montrer qu'on a $(1+a)^n - 1 = a\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+a)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En utilisant les deux questions précédentes, montrer qu'on a $(1+a)^n \geq 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}a^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Montrer qu'on a $1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \geq \sqrt[n]{n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant la question précédente.

e. En déduire la limite de $\sqrt[n]{n}$ quand n tend vers l'infini.

Remarques. Les inégalités de cet exercice se démontrent plus simplement lorsqu'on connaît la formule du binôme de Newton :

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k,$$

avec notamment $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Par ailleurs le résultat final de l'exercice s'exprime aussi sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n} = 0.$$

Exercice 2. Soit $D \subset \mathbb{R}$, x_0 un point d'accumulation de D, f et g deux fonctions définies sur D telles que les limites suivantes existent :

$$l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x), \quad m = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} g(x).$$

a. Lire dans le cours et comprendre la démonstration du résultat suivant :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

lorsque g ne s'annule pas sur D et $m \neq 0$.

b. En imitant cette démonstration, montrer que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} (f+g)(x) = l + m.$$

c. De même, montrer que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} (f\times g)(x) = lm.$$

On pourra remarquer que $f(x)g(x) - lm = (f(x)-l)g(x) + (g(x)-m)l$, et on commencera par trouver $\alpha_1 > 0$ tel que $|g(x)| \leq |m| + 1$ pour tout $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha_1$.