Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2006-2007
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 1

lundi 19 février 2007

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de f et donner un vecteur non nul $u_1 \in \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs $v = (x, y, z)$ tels que $f(v) = v$ est une droite dont on donnera un vecteur directeur u_2.
3. Montrer que le vecteur $u_3 = (2, -1, -3)$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
4. Écrire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3). *On ne demande pas de vérifier que c'est une base.*
5. On pose $v_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $v_2 = f(v_1)$, $v_3 = f(v_2)$. Exprimer v_2 et v_3 dans la base (u_1, u_2, u_3).
6. Montrer *à l'aide de la question précédente* que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Écrire la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3). *On n'utilisera pas la formule de changement de base.*

Exercice 2. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont-ils ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre ? On justifiera en les exprimant comme intervalles ou réunions d'intervalles.

$A =]-2,\ \pi] \cup [3,\ 5[$ $\qquad$ $B = {}^{c}(\{0\} \cup [4,\ 5])$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2 \text{ ou } x > 3\}$ $\qquad$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-4| \geq 6\} \cap \mathbb{R}_-$

$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[e^{-n},\ \frac{2n}{n+1}\right]$

Pour B, rapellons qu'on note ${}^{c}X$ le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'une partie $X \subset \mathbb{R}$.
Pour E, on pourra étudier les suites $u_n = e^{-n}$ et $v_n = \frac{2n}{n+1}$ (monotonie, limite) et remarquer que $u_1 < v_1$.

Exercice 3. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $k \leq x < k+1$, et on note $F(x) = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x.
On s'intéresse aux deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\exp(x)) > \tfrac{1}{2}\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid F(\exp(x)) > \tfrac{1}{2}\}.$$

1. a. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\exp(x))$ est continue.
   b. Exprimer A comme image réciproque d'un intervalle et en déduire que A est ouvert.
2. a. Démontrer, en utilisant la définition, que la fonction E est continue en tout point non entier $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
   b. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, démontrer que la fonction E n'est pas continue au point k.
   c. En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction F est-elle continue ?
   d. Pourquoi ne peut-on pas procéder comme à la question 1. pour montrer que B est ouvert ?
3. a. Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif fixé. Montrer que la partie suivante de $\mathbb{R}$ est ouverte :
   $$B_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k + \tfrac{1}{2} < \exp(x) < k+1\}.$$
   b. Soit $y \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Montrer que $F(y) > \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k + \frac{1}{2} < y < k+1$.
   c. Écrire B comme une réunion infinie d'ouverts. Conclure.