

FEUILLE N^O 1

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 2y + 7z = 5 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + 2y + 5z = 4 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 8z = 0 \\ 3x + 4y + 10z = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + y + (1-a)z = a+2 \\ (1+a)x - y + 2z = 0 \\ 2x - ay + 3z = a+2 \end{cases}$$

Dans le dernier cas on discutera selon la valeur du paramètre réel a .

Exercice 2. On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0, \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y - z + 3t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Montrer que les ensembles de solutions de (S_1) et (S_2) forment des sous-espaces de \mathbb{R}^4 . Déterminer la dimension et une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 3. Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que \mathcal{B} est une base de l'espace vectoriel E et calculer les coordonnées du vecteur u dans la base \mathcal{B} .

- a. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$; $u = (1, 3, 2)$.
- b. $E = \mathbb{C}^3$; $\mathcal{B} = ((1, -1, i), (-1, i, 1), (i, 1, -1))$; $u = (1 + i, 1 - i, i)$.
- c. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = (1 + X + X^2 + X^3, X + X^2 + X^3, X^2 + X^3, X^3)$; $u = (X + 1)^2$.

Exercice 4. Déterminer le noyau et le rang des applications linéaires suivantes :

- a. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, 2x - 3y + z)$,
- b. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, y - z, 2x + 2z)$,
- c. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (4x, y - x, 2x + y)$,
- d. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y)$,
- e. $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto XP'$.

Exercice 5. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. Soit les applications linéaires

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, y + 2z),$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, x - 2y, x - 3y).$$

- a. Donner, dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 , les matrices de f et g .
- b. Calculer les matrices de $g \circ f$ et de $f \circ g$ dans les bases précédentes. En déduire l'expression de $(g \circ f)(x, y, z)$ et de $(f \circ g)(x, y)$.
- c. Calculer le rang des applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$. Lorsque c'est possible, donner la matrice de leur inverse.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (-x + y, x + 2y + z)$. On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 :

$$u_1 = (1, 1, 2), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad u_3 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad v_1 = (1, 1), \quad v_2 = (1, -1).$$

- Montrer que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ sont des bases de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 , respectivement.
- On note \mathcal{B}_2 la base canonique de \mathbb{R}^2 , et \mathcal{B}_3 celle de \mathbb{R}^3 . Écrire la matrice de f dans \mathcal{B}_3 et \mathcal{B}_2 , puis \mathcal{B}_3 et \mathcal{V} , et enfin dans \mathcal{U} et \mathcal{V} .

Exercice 8. Dans le plan vectoriel rapporté à une base (i, j) on définit l'application linéaire f par :

$$f(i) = 2i - 3j, \quad f(j) = i - 2j.$$

- Exprimer les coordonnées de $f(u)$ en fonction de celles de u , dans la base (i, j) .
- Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = u$ est une droite.
Déterminer un vecteur directeur i' de cette droite.
- Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = -u$ est une droite.
Déterminer un vecteur directeur j' de cette droite.
- Montrer que (i', j') est une base.
Donner l'expression de f dans cette base, comme à la première question.
- Soit $v = i' + 2j'$. Placer i', j', v et $f(v)$ sur un dessin.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Écrire la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' . Calculer A'^n pour tout n .
- Écrire la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Calculer les coordonnées dans \mathcal{B}' du vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$.
- Calculer les coordonnées dans la base canonique du vecteur $f^n(u)$.