Feuille n^{o} 4

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles des formes linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + yz$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + 3z, 2y)$
4. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \Re(z)$
5. $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R},\ P \mapsto P''(1) + 2P(0)$
6. $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R},\ P \mapsto \int_{-1}^{1} x^2 P(x)dx$

Exercice 2.

a. Montrer que les familles de vecteurs suivantes sont libres, et déterminer les bases duales :
   - $u_1 = (0, 2, -1)$, $u_2 = (2, 2, -1)$, $u_3 = (0, 2, 1)$.
   - $u_1 = (2, -2, 0)$, $u_2 = (0, 2, -1)$, $u_3 = (1, 2, 1)$.

b. Montrer que les familles de formes linéaires suivantes sont libres, et déterminer les bases de $\mathbb{R}^3$ dont ce sont les bases duales :
   - $\varphi_1(x, y, z) = x - y + z$, $\varphi_2(x, y, z) = y - 2z$, $\varphi_3(x, y, z) = z$.
   - $\varphi_1(x, y, z) = x + 3y$, $\varphi_2(x, y, z) = y + 2z$, $\varphi_3(x, y, z) = x + y + z$.

Exercice 3. On considère les formes linéaires suivantes, définies sur $\mathbb{R}[X]_3$:

$$\varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P'(1), \quad \varphi_3(P) = P(2), \quad \varphi_4(P) = P'(2).$$

a. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de $\mathbb{R}[X]_3^*$.
b. Déterminer la base duale (P_1, P_2, P_3, P_4).
c. Décomposer le polynôme X^2 dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4).
d. Donner une expression de P en fonction de $P(1)$, $P'(1)$, $P(2)$, $P'(2)$ valable pour tout $P \in \mathbb{R}[X]_3$.

Exercice 4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit une forme linéaire φ_t sur $\mathbb{R}[X]_3$ en posant $\varphi_t(P) = P(t)$.

a. Soit t_0, t_1, t_2, t_3 quatre réels deux-à-deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \varphi_{t_3}, \varphi_{t_4})$ est libre.
b. Déterminer la base duale de $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.
c. Donner une expression de P en fonction de ses valeurs en 0, 1, 2 et 3, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_3$.

Exercice 5. Montrer que les applications φ suivantes sont des formes bilinéaires, dire si elles sont symétriques et calculer $\varphi(x, x)$:

1. $\varphi\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = xx' + 2xy' + zz' - 2yz' + 2x'y$
2. $\varphi\left((x, y), (x', y')\right) = 3xx' - x'y - xy' + yy'$

Montrer que les applications q suivantes sont des formes quadratiques en calculant les formes bilinéaires associées :

1. $q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2yz + z^2$
2. $q(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$
3. $q(x, y, z) = 2xy - y^2 + 5yz + 3z^2$
4. $q(x, y, z) = xy + 2xz - yz$
5. $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$

Écrire les matrices correspondantes dans la base canonique.

Exercice 6. Les formes quadratiques suivantes sont-elles positives ? définies-positives ?
En donner des expressions développées.

1. $q(x, y, z) = (x + 2y)^2 + (z - y)^2 - 5y^2$
2. $q(x, y) = 2x^2 + (y - x)^2$

6. $q(x, y, z) = -2(x + y - z)^2 + (y - 2z)^2 + (2x + y)^2$

Inversement, en décomposant les formes quadratiques 3, 4 et 5 de l'exercice précédent en carrés de formes linéaires indépendantes, dire si elles sont positives ou pas.

Exercice 7. Décomposer les formes quadratiques suivantes en carrés de formes linéaires indépendantes, puis donner des bases dans lesquelles les matrices associées sont diagonales.

- $q_1 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz$
- $q_2 : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 8xz$
- $q_3 : (x, y, z) \mapsto x^2 - 3y^2 - 2xy + 4xz$
- $q_4 : (x, y, z, t) \mapsto xy + xz + xt + yz + yt + zt$
- $q_5 : (x, y, z, t) \mapsto xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$

Exercice 8. Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{pour tout vecteur} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q est-elle dégénérée ?

b. Montrer que q est positive dans le cas $a = 2$.

c. Calculer $q(1, 1, -1)$ pour tout a.

d. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q est-elle définie-positive ? définie-négative ?