Feuille n° 1

Exercice 1.

a. Trouver l'intersection de la droite (D) d'équation $x+y=5$ avec l'hyperbole (H) d'équation $xy=6$.

b. Trouver l'intersection des deux ensembles

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y-1=0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-5y+4=0\}.$$

c. Montrer qu'on a $A \subset B$ pour les ensembles suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x-1\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-x+2y+4)(3x-y+3) \geq 0\}.$$

Exercice 2. Déterminer le complémentaire de $A = [0\,,1]$ dans E dans les cas suivants :

$$E = \mathbb{R}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad E = \mathbb{R}^3, \quad E = [0\,,5] \quad \text{et} \quad E = [0.5\,,2].$$

Exercice 3.

a. Donner quatre éléments de $[1\,,2] \times [2\,,3]$, puis de $[0\,,1] \times \{4\}$.

b. Comment s'écrit un élément de $\mathbb{R} \times [0\,,1]$? de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$?

c. Représenter $[1\,,2] \times [3\,,4]$, $([1\,,3] \times [2\,,4]) \cup ([2\,,4] \times [1\,,3])$ et $([1\,,3] \times [2\,,4]) \cap ([2\,,4] \times [1\,,3])$.

Exercice 4. *Rappelons que l'*image directe *de $A \subset E$ par $f : E \to F$ est la partie suivante de F :*

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \;\; y = f(x)\}.$$

a. Que vaut $f(A)$ dans le cas $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [-0.5\,,\,2]$?

b. Soit f une application de E vers F et A, $B \subset E$. Montrer que

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

c. Grâce à la fonction considérée au a, montrer que la dernière inclusion peut être stricte.

Exercice 5. *Rappelons que l'*image réciproque *de $B \subset F$ par $f : E \to F$ est la partie suivante de E :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (e^x - 1)^2$.

a. Tracer le tableau de variation, puis l'allure du graphe de f.
On pourra commencer par étudier la fonction $x \mapsto (x-1)^2$.

b. Déterminer $f^{-1}(\{a\})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

c. On note I_a l'intervalle compris entre $\frac{1}{4}$ et a, ouvert en $\frac{1}{4}$ et fermé en a.
Déterminer $f^{-1}(I_a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. On note $E(x)$ la partie entière de x. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x^2}{E(x)} = 0$.

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

a. Déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

b. Trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui décroît vers 0 et telle que $f(x_n) = \frac{1}{2}$ pour tout n.

c. En déduire que f n'est pas continue en 0.

d. Qu'en est-il si on pose $f(0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0 ?

Exercice 8. Dans les exemples ci-dessous, la fonction f peut-elle être prolongée par continuité en a ? Si oui, précisez le prolongement obtenu.

$$f_1 : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{1+x^3}{1+x} \quad \text{en} \quad a=-1, \qquad f_2 : \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} \text{ en } a=2,$$
$$f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\tan x}{x} \quad \text{en} \quad a=0, \qquad f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{1-\cos 2x}{3x^2} \quad \text{en} \quad a=0,$$
$$f_5 : \left]\tfrac{1}{2},+\infty\right[\to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} \quad \text{en} \quad a=\tfrac{1}{2}, \qquad f_6 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{en} \quad a=0,$$
$$f_7 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{x^2+|x|}{x} \quad \text{en} \quad a=0, \qquad f_8 : \mathbb{R}\setminus\{-3,2\} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \quad \text{en} \quad a=2,$$
$$f_9 : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x<3 \\ 2x+3 & \text{si } x>3 \end{cases} \quad \text{en} \quad a=3.$$

Exercice 9. Soit a, b deux réels et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si} \quad x \in \left]-\infty,-1\right] \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in \left]-1,1\right[\\ b(x^2-1) & \text{si} \quad x \in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$

a. Peut-on trouver une valeur de a pour laquelle f est continue sur $\left]-\infty,1\right[$?
b. Peut-on trouver une valeur de b pour laquelle f est continue sur $\left]-1,+\infty\right[$?

Exercice 10. Étudier la convergence quand $n \to \infty$ des suites suivantes :

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\quad y_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\quad z_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1},$$
$$u_n = \frac{n^5+n^3}{n^5+n^2+1},\quad v_n = \frac{(-1)^n+4}{2^n},\quad w_n = (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Dans le dernier cas on discutera selon la valeur des réels positifs a, b.

Exercice 11. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n\ \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On pourra utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 12. Soit $u_0 \in \left]-2,+\infty\right[$. On pose $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a. Étudier, suivant la valeur de u_0, la monotonie de la suite (u_n).
b. Montrer que dans tous les cas, elle converge, et expliciter sa limite.

Exercice 13. La suite suivante de nombres réels converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\quad \ldots$$

Exercice 14. Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 < u_{n+1} < u_n$.
b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
c. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{1+u_n}$ est convergente.
d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{u_n}{1+u_0} \leq \frac{u_n}{1+u_n}.$$
En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 15. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{14}{3}$.
a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
b. Démontrer par récurrence que cette suite est croissante, majorée.
c. En déduire qu'elle converge vers une limite réelle ℓ et calculer ℓ.
d. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique. En déduire explicitement v_n puis u_n.
e. Déterminer le plus petit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - 7| \leq 10^{-3}$.

Procéder à la même étude pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{5}{2}$.