Feuille n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1. Pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ on pose

$$d'(x,y) = \sqrt{|x-y|} \quad \text{et} \quad d''(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

a. Montrer que d' et d'' sont des distances sur $\mathbb{R}$.

b. Soit (x_n) une suite de réels et $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que (x_n) converge vers x au sens de d' ou d'' **ssi** (x_n) converge vers x au sens usuel.

c. Représenter les boules de centre 0 et rayon 1 associées aux distances d' et d''.

Exercice 2. Pour x, $y \in \mathbb{R}$ on pose $d(x,y) = \min(2, |x-y|)$.

a. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

b. Représenter les boules ouvertes $B_d(0,1)$, $B_d(0,2)$, $B_d(0,3)$ relativement à d.
Représenter la boule fermée $\bar{B}_d(0,2)$.

c. Soit (x_n) une suite de réels et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que (x_n) converge vers x relativement à d si et seulement si (x_n) converge vers x relativement à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

d. Soit $x \in \bar{B}_d(0,2)$. Existe-t-il une suite (x_n) à valeurs dans $B_d(0,2)$ et qui converge vers x ?

Exercice 3. Rappelons que les distances d_1, d_2, d_∞ sur $\mathbb{R}^2$ vérifient :

$$d_1((0,0),(x,y)) = |x|+|y|, \quad d_2((0,0),(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad d_\infty((0,0),(x,y)) = \max(|x|,|y|).$$

a. Représenter les boules ouvertes de centre $(0,0)$ et rayon 1 associées aux distances d_1, d_2 et d_∞.

b. Démontrer les inégalités $\max(|s|,|t|) \leq \sqrt{s^2+t^2} \leq |s|+|t| \leq 2\max(|s|,|t|)$ pour tous s, $t \in \mathbb{R}$.

c. En déduire des inclusions entres boules ouvertes de centre $(0,0)$ associées à d_1, d_2, d_∞.

Exercice 4. Pour deux points (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$d((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |y-y'| & \text{si } x = x' \\ |y|+|y'|+|x-x'| & \text{si } x \neq x'. \end{cases}$$

a. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

b. Représenter les boules $B_d((1,0),1)$, $B_d((1,1),1)$, $B_d((1,1),2)$ relatives à d.

c. Montrer qu'on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$:

$$B_d((x,y),r) = (\{x\} \times]y-r, y+r[) \cup B_1((x,0), r-|y|),$$

où on note B_1 les boules ouvertes relatives à la distance d_1.

Exercice 5. Notons $\mathbb{D}_1$ l'ensemble des nombres décimaux dans $[0,1[$. Pour $x \neq y$ dans $\mathbb{D}_1$ on note $k(x,y)$ la position du premier chiffre qui diffère dans les écritures décimales de x et y, en rajoutant si besoin des 0 à la fin :

$$\begin{cases} x &= 0,a_1a_2\ldots a_{k-1}a_ka_{k+1}\ldots a_n \\ y &= 0,a_1a_2\ldots a_{k-1}b_kb_{k+1}\ldots b_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad k = k(x,y), \quad a_k \neq b_k.$$

On pose ensuite, pour x, $y \in \mathbb{D}_1$:

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+k(x,y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

a. Soit $x \neq y$ des éléments de $\mathbb{D}_1$ et $k = k(x,y)$. Montrer qu'on a, pour tout $z \in \mathbb{D}_1$, $k(x,z) \leq k$ ou $k(y,z) \leq k$.

b. Montrer que d est une distance et que $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$.
Pour $x \in \mathbb{D}_1$ et $r > 0$ on note $B_d(x,r)$ la boule de centre x et rayon r relativement à d.

c. Soit $r > 0$ et x, $y \in \mathbb{D}_1$ tels que $d(x,y) < r$. Montrer que $B_d(x,r) = B_d(y,r)$.