Licence 1 **2006-2007**
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n° 4

Développements limités

1) Calculer par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
En déduire celles de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ puis $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.
Retrouver le développement de Taylor de f à tout ordre.

2) Examiner la parité de la fonction f définie pour $|x| < 1$ par $f(x) = \operatorname{Log} \dfrac{1+x}{1-x}$ et calculer le $DL_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On considère les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\sin x = x + x\varepsilon_1(x), \quad \operatorname{sh} x - x = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x).$$

a. Donner le $DL_1(0)$ de $\sin x + (\operatorname{sh} x - x)$. Commenter le résultat.
b. Quel est le $DL_5(0)$ de $\sin x + (\operatorname{sh} x - x)$?

4) Calculer les $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ et $g : x \mapsto \cos x \sin x$.

5) Calculer, lorsqu'ils existent :
a. le $DL_3(1)$ de $(\operatorname{Log} x)/x^2$,
b. le $DL_3(2)$ de $\operatorname{Log} x$,
c. le $DL_3(3)$ de $\sqrt{x-3}$.

6) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d et une fonction $\varphi :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniques tels que

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Donner la valeur de a, b, c et d.

7) Étudier l'existence d'un développement limité au voisinage de 0 de $g : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\sin x - \tan x}$.

8) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \cos x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.
a. Quel théorème permet de déduire l'existence de DL_n de l'existence de dérivées $n^{\text{ièmes}}$?
b. Montrer que si une fonction admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, alors elle est dérivable en 0.
c. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

9) On pose $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.
a. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ entier.
b. Montrer que f admet un $DL_1(0)$, mais que f' n'admet pas de $DL_0(0)$.

10) Donner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11) On se propose de calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^x$.

a. Effectuer le $DL_4(0)$ de $u(x) = x\,\mathrm{Log}(1+x)$ et vérifier que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.

b. Calculer le $DL_4(0)$ de $u(x)^2$, $u(x)^3$ et $u(x)^4$.

c. Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{u(x)}$.

d. Calculer le $DL_3(0)$ de $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

12) Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto e^{(e^x)}$.

13) Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$. *On utilisera le* $DL_2(0)$ *de* $\frac{1}{1-u}$.
Quel est le $DL_5(0)$ de f ?

14) Calculer les limites en 0 des fonctions définies comme suit :

$$f(x) = \frac{2x^3+x^4}{3x^3+x^5}, \qquad g(x) = \frac{x^4+x^5+x^6}{x^2-2x^3+3x^4}, \qquad h(x) = \frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x},$$

$$i(x) = \frac{3^x-2^x}{x}, \qquad j(x) = \frac{x-\sin x}{(\tan x)^3}, \qquad k(x) = \frac{e^{\sin x}-\cos x}{\cos(\sin x)-e^x}.$$

15) Déterminer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{Log}\, x}{x^3-1}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$.

16) Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{2}{(\cos x)^2} + \dfrac{1}{\mathrm{Log}(\sin x)}$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
On réduira au même dénominateur après avoir posé $u = x - \frac{\pi}{2}$.

17) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^5}$.

18) On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, \quad f_2(x) = \frac{1+x+x^2}{1-2x+3x^2}.$$

a. Calculer $f_i'(0)$ pour $i = 1, 2$.
En déduire l'équation $y = ax+b$ de la tangente au graphe de f_i au point d'abscisse 0.

b. Écrire le $DL_3(0)$ de f_1 et le $DL_2(0)$ de f_2. Retrouver le résultat de la question précédente.
Quelle méthode préférez-vous ?

c. En utilisant le résultat de la question b, étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ pour x proche de 0.
Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0 ?

19) On se propose de tracer le graphe de $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

a. Étudier la parité et les variations de f.

b. Placer les tangentes au graphe de f aux points d'abscisses 0, 1, $\sqrt{3}$, 2.

c. Étudier la position du graphe par rapport à ses tangentes aux points ci-dessus.

d. Tracer l'allure du graphe de f.

20) On définit trois fonctions f_1, f_2, f_3 en posant

$$f_1(x) = x\Big(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\Big), \quad f_2(x) = \Big(2x+3+\frac{1}{x}\Big)e^{\frac{1}{x}}, \quad f_3(x) = \sqrt[4]{16x^4+x^3+1}.$$

a. Trouver trois fonctions g_i, $i = 1, 2, 3$, telles que $f_i(x) = xg_i(\frac{1}{x})$.

b. Donner le développement limité à trois termes en 0 des fonctions g_i.

c. Pour chaque fonction f_i, trouver des réels a, b et c tels que

$$f_i(x)-(ax+b) = \frac{1}{x}(c+\varphi(x)),$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Montrer que le graphe de f_i admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. Quelle est la position du graphe par rapport à cette asymptote ?