Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2007-2008
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 2

lundi 3 mars 2008

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. *(5 points)*
On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définies par les formules suivantes, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$f(e_1) = 3e_2, \quad f(e_2) = e_1 + e_3, \quad f(e_3) = e_2 + 2e_3 \;;$$
$$g(x, y, z, t) = (3x + y + t, 2x - y + t, 7x + 2y + z, 5y + t).$$

On note A et B les matrices respectives de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer les matrices A et B.
2. Calculer les déterminants de A et B.
   On procèdera de préférence par développement suivant une ligne ou une colonne.
3. Les applications f et g sont-elles bijectives ?
   On utilisera la question précédente.

Exercice 2. *(9 points)*

1. Déterminer le sens de variation et la limite des suites suivantes, définies pour les indices $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \quad v_n = 4 - \frac{1}{n^2}, \quad x_n = e^{-n}, \quad y_n = \frac{n^2 - 1}{n}.$$
2. Déterminer graphiquement les réunions suivantes :
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{n+2}{n+1},\ 4 - \frac{1}{n^2} \right[, \quad B = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \left[e^{-n},\ \frac{n^2 - 1}{n} \right].$$
   Dans chaque cas on représentera schématiquement sur la droite réelle quelques-un des intervalles considérés, ainsi que le résultat de leur réunion. Puis on exprimera A et B sous forme d'intervalles.
3. Les ensembles A et B sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}$?
4. Démontrer que l'ensemble B est bien égal à l'intervalle trouvé en 2.

Exercice 3. *(6 points)*
Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ on note ${}^cA$ le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

1. On prend $A = [1, 2]$. Exprimer sous forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles les ensembles $f(A)$, $f({}^cA)$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}({}^cA)$ dans les deux cas suivants : $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$.
   On présentera les résultats dans un tableau :

	$f(A)$	$f({}^cA)$	$f^{-1}(A)$	$f^{-1}({}^cA)$
$f(x) = x^2$				
$f(x) = x^3$				

2. Montrer qu'on a $f^{-1}({}^cA) = {}^c(f^{-1}(A))$ pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   On pourra montrer que tout $x \in \mathbb{R}$ est soit dans $f^{-1}(A)$, soit dans $f^{-1}({}^cA)$.
3. A-t-on $f({}^cA) = {}^c(f(A))$ pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?