Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2007-2008
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 4

lundi 31 mars 2008

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage <u>après</u> la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. *(4 points)* On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = ([-1,1] \times [-2,0]) \cup (]0,2[\times]-1,1[)\,, \quad B = \mathbb{Z} \times [0,1]\,,$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) \geq \cos(y)\}.$$

1. Représenter A et B.
2. Démontrer que B et C sont fermés.
3. Démontrer que A n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 2. *(7 points)* On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -10 & -1 & -2 \\ -23 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

0. Vérifier que $w = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{w} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sont les racines du polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}$.
1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
   Donner sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit D la matrice diagonale ayant 1, w et $\overline{w}$ comme termes diagonaux.
   Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
   On ne calculera ni P ni P^{-1}.
3. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer D^n pour tout n.
4. Montrer qu'on a $\mathrm{Tr}(A^n) = 1 + 2\cos(\frac{2n\pi}{3})$ pour tout n.

Dans la question 4 la notation $\mathrm{Tr}(M)$ *désigne la trace de M.*
Rappelons qu'on a $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ *pour toutes matrices M, N.*

Exercice 3. *(9 points)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est continue.
2. Représenter dans le plan les courbes d'équations $y = 1 + x^2$ et $y = -(1 + x^2)$.
3. Représenter sur la même figure l'ensemble $f^{-1}([-1,1])$. Montrer qu'il n'est pas borné.
4. L'image réciproque d'un partie bornée par une application continue est-elle nécessairement bornée ?

On considère maintenant une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quelconque. On suppose que cette fonction est *propre*, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que

$$|x| \geq n \ \text{ ou } \ |y| \geq n \implies f(x,y) \geq u_n.$$

5. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$: il existe $M > 0$ tel que $A \subset [-M, M]$.
   a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n > M$. On fixe un tel n pour la question suivante.
   b. Montrer que pour tout $(x,y) \in f^{-1}(A)$ on a $|x| < n$ et $|y| < n$.
6. Montrer que l'image réciproque par f d'une partie bornée de $\mathbb{R}$ est encore bornée.
7. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(1+x^2) + 2y^2$ est propre, avec $u_n = \ln(n)$.
   On pourra utiliser l'inégalité $t \geq \ln(t)$, valable pour tout $t > 0$.