Algèbre 1 : Révisions

Exercice 1. On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z=0\\ x+y+z+t=0\\ x-t=0,\end{array}\right.\qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} x+y-z-t=0\\ x-y-z+3t=0\\ x-z+t=0\\ 2x+y-2z=0.\end{array}\right.$$

Montrer que les ensembles de solutions de (S_1) et (S_2) forment des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer la dimension et une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 2. Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E et calculer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a. $E=\mathbb{R}^3$; $\mathcal{B}=((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$; $u=(1,3,2)$.
b. $E=\mathbb{C}^3$; $\mathcal{B}=((1,-1,i),(-1,i,1),(i,1,-1))$; $u=(1+i,1-i,i)$.
c. $E=\mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B}=(1+X+X^2+X^3,X+X^2+X^3,X^2+X^3,X^3)$; $u=(X+1)^2$.

Exercice 3. Déterminer le noyau et le rang des applications linéaires suivantes :

a. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (x,y,z)\mapsto(x+y,y+z,2x-3y+z)$,
b. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (x,y,z)\mapsto(x+2y-z,y-z,2x+2z)$,
c. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad (x,y)\mapsto(4x,y-x,2x+y)$,
d. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto(2x+y-z,x-y)$,
e. $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X],\quad P\mapsto XP'$.

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&3&2\\-1&2&3\\4&0&1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&0&3&2\\-1&1&8&-5\\2&0&6&3\\-1&0&-3&-7\end{vmatrix}.$$

Exercice 5. Soit les applications linéaires

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(x+2y+3z,y+2z),$$
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x-y,x-2y,x-3y).$$

a. Donner, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et g.
b. Calculer les matrices de $g\circ f$ et de $f\circ g$ dans les bases précédentes.
En déduire l'expression de $(g\circ f)(x,y,z)$ et de $(f\circ g)(x,y)$.
c. Calculer le rang des applications linéaires $f\circ g$ et $g\circ f$.
Lorsque c'est possible, donner la matrice de leur inverse.

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z)=(-x+y,x+2y+z)$. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$:

$$u_1=(1,1,2),\quad u_2=(1,0,1),\quad u_3=(1,-1,1)\quad\text{et}\quad v_1=(1,1),\quad v_2=(1,-1).$$

a. Montrer que $\mathcal{U}=(u_1,u_2,u_3)$ et $\mathcal{V}=(v_1,v_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, respectivement.
b. On note $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B}_3$ celle de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$, puis $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{V}$, et enfin dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Exercice 7. Dans le plan vectoriel rapporté à une base (i, j) on définit l'application linéaire f par :

$$f(i) = 2i - 3j, \quad f(j) = i - 2j.$$

a. Exprimer les coordonnées de $f(u)$ en fonction de celles de u, dans la base (i, j).

b. Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = u$ est une droite.
Déterminer un vecteur directeur i' de cette droite.

c. Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = -u$ est une droite.
Déterminer un vecteur directeur j' de cette droite.

d. Montrer que (i', j') est une base.
Donner l'expression de f dans cette base, comme à la première question.

e. Soit $v = i' + 2j'$. Placer i', j', v et $f(v)$ sur un dessin.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. On pose $e_1' = e_2 + e_3$, $e_2' = e_1 + e_3$, $e_3' = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A'^n pour tout n.

c. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$.

d. Calculer les coordonnées dans la base canonique du vecteur $f^n(u)$.