Algèbre 6 : Endomorphismes symétriques et isométriques

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $v = (3, 1, 2)$.

a. Trouver une équation puis une base orthonormale de $D^\perp$.

b. Calculer les projetés orthogonaux de $e_1 = (1, 0, 0)$ sur D et sur $D^\perp$.

c. Écrire la matrice dans la base canonique des projections orthogonales p_D, $p_{D^\perp}$ sur D et $D^\perp$.

d. Vérifier que $p_D + p_{D^\perp} = \mathrm{Id}$.

Exercice 2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0. \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Quelle est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport à P ?

Exercice 3. Soit a un paramètre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a-1 & -a-2 & a-1 \\ -a-2 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & a+2 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
On fera apparaître deux 0 sur la 2^e ligne en opérant sur les lignes et les colonnes.

c. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il une symétrie ?

d. Trouver une base de vecteurs propres pour f lorsque $a = 0$.

Exercice 4. Soit a un nombre réel fixé, et M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 4a+5 & 4a-4 & 2-2a \\ 4a-4 & 4a+5 & 2-2a \\ 2-2a & 2-2a & a+8 \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
On considère l'endomorphisme de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $N = \dfrac{1}{9}M$.

a. On se place dans le cas $a = 0$.
   (i) Montrer que f est une projection orthogonale.
   (ii) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
   (iii) Déterminer une équation de $(\operatorname{Ker} f)^\perp$, puis de $\operatorname{Im} f$.
   (iv) Donner, sans calcul mais en justifiant, le polynôme caractéristique de f.

On revient au cas général.

b. Montrer sans calcul que f est diagonalisable.

c. Calculer le coefficient de M^2 situé à l'intersection de la première ligne et de la première colonne.

d. À l'aide de la question précédente, déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est : une projection orthogonale différente de l'identité ; une symétrie orthogonale différente de l'identité.

Exercice 5. On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée (et orientée) par le vecteur $v = (1, -2, 2)$.

a. Trouver une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur appartient à D.

b. Quelles sont les matrices dans la base canonique de

   (i) la symétrie orthogonale par rapport à D ?

   (ii) la rotation d'axe D et d'angle $\pi/2$?

   (iii) la rotation d'axe D et d'angle $2\pi/3$?

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + 2y = 0$. Soient p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur D, et s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à D.

a. Ecrire les matrices de p et de s dans la base canonique.

b. Trouver toutes les droites Δ de $\mathbb{R}^2$ telles que les droites Δ et $s(\Delta)$ sont orthogonales.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Montrer que f est une isométrie.

b. Montrer que f a une unique valeur propre que l'on déterminera.

c. Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que u_1 est vecteur propre de f.

d. Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

e. Donner une rotation r et une symétrie orthogonale s telles que $f = r \circ s = s \circ r$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
On considère la droite D engendrée par le vecteur $u_1 = \frac{1}{5}(3, 0, -4)$.

a. Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, avec $u_2 = (0, 1, 0)$.

b. Donner les matrices dans la base (u_1, u_2, u_3) de

   (i) p, la projection orthogonale sur $D^\perp$;

   (ii) s, la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$;

   (iii) r, une rotation d'axe D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c. Donner les matrices de p, s et r dans la base canonique.

Exercice 9. Compléter la matrice suivante en une matrice de rotation

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Y a-t-il plusieurs solutions ? Déterminer l'axe et le cosinus de l'angle des rotations obtenues.

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2a & b & -a \\ -a & a & c \\ b & 2a & a \end{pmatrix}.$$

a. Pour quelles valeurs de a, b et c l'application f est-elle une isométrie ?

b. On se place dans le cas où $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{1}{9}$ et $c = -\frac{7}{9}$.

   (i) Montrer que f est une rotation.

   (ii) Déterminer son axe et le cosinus de son angle.