

ANALYSE 1 : RÉVISIONS

Exercice 1.

- Trouver l'intersection de la droite (D) d'équation $x + y = 5$ avec l'hyperbole (H) d'équation $xy = 6$.
- Trouver l'intersection des deux ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y - 1 = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y + 4 = 0\}.$$

- Montrer qu'on a $A \subset B$ pour les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-x + 2y + 4)(3x - y + 3) \geq 0\}.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le complémentaire de $A = [0, 1]$ dans E :

$$E = \mathbb{R}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad E = \mathbb{R}^3, \quad E = [0, 5] \quad \text{et} \quad E = [0.5, 2].$$

Exercice 3.

- Donner quatre éléments de $[1, 2] \times [2, 3]$, puis de $[0, 1] \times \{4\}$.
- Comment s'écrit un élément de $\mathbb{R} \times [0, 1]$? de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$?
- Représenter $[1, 2] \times [3, 4]$, $([1, 3] \times [2, 4]) \cup ([2, 4] \times [1, 3])$ et $([1, 3] \times [2, 4]) \cap ([2, 4] \times [1, 3])$.

Exercice 4. Rappelons que l'image directe de $A \subset E$ par $f : E \rightarrow F$ est la partie suivante de F :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}.$$

- Que vaut $f(A)$ dans le cas $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [-0.5, 2]$?
- Soit f une application de E vers F et $A, B \subset E$. Montrer que

$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

- Grâce à la fonction considérée au a, montrer que la dernière inclusion peut être stricte.

Exercice 5. Rappelons que l'image réciproque de $B \subset F$ par $f : E \rightarrow F$ est la partie suivante de E :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (e^x - 1)^2$.

- Tracer le tableau de variation, puis l'allure du graphe de f .
On pourra commencer par étudier la fonction $x \mapsto (x - 1)^2$.
- Déterminer $f^{-1}(\{a\})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- On note I_a l'intervalle compris entre $\frac{1}{4}$ et a , ouvert en $\frac{1}{4}$ et fermé en a .
Déterminer $f^{-1}(I_a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. On note $E(x)$ la partie entière de x . Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x^2}{E(x)} = 0$.

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

- Déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.
- Trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui décroît vers 0 et telle que $f(x_n) = \frac{1}{2}$ pour tout n .
- En déduire que f n'est pas continue en 0.
- Qu'en est-il si on pose $f(0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0?

Exercice 8. Soit a, b deux réels et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ b(x^2 - 1) & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

- Peut-on trouver une valeur de a pour laquelle f est continue sur $]-\infty, 1[$?
- Peut-on trouver une valeur de b pour laquelle f est continue sur $]-1, +\infty[$?

Exercice 9. Dans les exemples ci-dessous, la fonction f peut-elle être prolongée par continuité en a ? Si oui, précisez le prolongement obtenu.

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1+x^3}{1+x} \quad \text{en } a = -1, \quad f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} \quad \text{en } a = 2,$$

$$f_3 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\tan x}{x} \quad \text{en } a = 0, \quad f_4 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1-\cos 2x}{3x^2} \quad \text{en } a = 0,$$

$$f_5 :]\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} \quad \text{en } a = \frac{1}{2}, \quad f_6 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{en } a = 0,$$

$$f_7 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2+|x|}{x} \quad \text{en } a = 0, \quad f_8 : \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \quad \text{en } a = 2,$$

$$f_9 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 2x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } a = 3.$$

Exercice 10. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On pourra utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 11. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

- Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .
- Démontrer par récurrence que cette suite est croissante, majorée.
- En déduire qu'elle converge vers une limite réelle ℓ et calculer ℓ .
- Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique. En déduire explicitement v_n puis u_n .
- Déterminer le plus petit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies |u_n - 7| \leq 10^{-3}$.

Procéder à la même étude pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2}$.