# Analyse 5 : Différentiabilité

**Corrigé de l'exercice 11.**

a. On a $U = g^{-1}(\mathbb{R}^*)$ avec $g(x,y) = y$. L'application $g$ est continue car c'est un polynôme, et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $U$ est un ouvert. Sur $U$, la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ est continue car c'est un quotient de polynômes et son dénominateur ne s'annule pas. En composant avec la fonction sin, qui est continue, puis en multipliant par le polynôme $y$, on obtient $f$, donc $f$ est continue sur $U$.

b. D'après a., il reste à montrer que $f$ est continue en $(a,0)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Fixons un tel $a$ et remarquons que par définition de $f$ on a $f(a,0) = 0$.
Si $y = 0$ on a $f(x,y) = 0$, et si $y \neq 0$ :

$$|f(x,y)| = \left| y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq y^2 \quad \text{car } |\sin(t)| \leq 1 \text{ pour tout } t.$$

On a donc dans tous les cas $|f(x,y)| \leq y^2$. Comme la fonction $(x,y) \mapsto y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et nulle en $(a,0)$ on a $\lim_{(x,y)\to(a,0)} y^2 = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$, ce qui montre que $f$ est continue en $(a,0)$.

c. D'après a., il reste à montrer que $f$ admet des dérivées partielles en $(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé. On étudie pour cela des taux d'accroissement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,0) - f(a,0)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{0-0}{x-a} = 0, \quad \text{et}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(a,y) - f(a,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin(\frac{a}{y}) - 0}{y} = \lim_{y\to 0} y \sin\left(\frac{a}{y}\right) = 0,$$

car $|y \sin(\frac{a}{y})| \leq y$ et $\lim_{y\to 0} y = 0$.

d. D'après a., il reste à montrer que $f$ admet une différentielle en $(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé. Cette différentielle $L$ est nécessairement donnée par les dérivées partielles trouvées à la question précédente : $L(h,k) = h\times 0 + k \times 0 = 0$. Donc $f$ est différentiable en $(a,0)$ si et seulement si il existe une application $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $(0,0)$ et telle que :

$$f(a+h,k) = f(a,0) + L(h,k) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) = \|(h,k)\|\varepsilon(h,k).$$

On a nécessairement $\varepsilon(h,k) = f(a+h,k)/\|(h,k)\|$, et la limite de cette quantité en $(0,0)$ est bien nulle d'après la majoration suivante :

$$|\varepsilon(h,k)| = \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \left| \sin\left(\frac{a+h}{k}\right) \right| \leq \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}.$$

e. *D'après a. et c., $f$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ entier et elles sont continues sur $U$. Si $f$ n'est pas de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, cela ne peut donc être qu'à cause de la non-continuité d'une des dérivées partielles en un point de la forme $(a,0)$.*
Calculons la dérivée partielle de $f$ par rapport à $y$ sur $U$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \times \sin\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \times \cos\left(\frac{x}{y}\right) \times \frac{-x}{y^2} = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\text{et en particulier} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = 2y \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right).$$

Quand $y$ tend vers 0, le premier terme tend vers 0 car il est majoré en valeur absolue par $2|y|$. Par contre le second terme n'a pas de limite car il oscille de plus en plus rapidement entre $-1$ et 1. Cela montre que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $y$ n'a pas de limite en $(1,0)$, donc $f$ n'est pas de classe $C^1$.
*On peut vérifier en revanche que la dérivée partielle par rapport à $x$ admet 0 comme limite en tout point de la forme $(a,0)$, ce qui coïncide avec la valeur trouvée en c. : cette dérivée partielle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.*