Université de Caen
UFR de Sciences
L2 MASS

2e semestre 2007-2008
Mathématiques
Analyse

Analyse 7 : Recherche d'extremums

Exercice 1. Rechercher les points critiques des fonctions

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz,$$
$$g : \mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{-x^2}{z} + xyz - z - y.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

a. Calculer les dérivées partielles et déterminer les points critiques de f.
b. Étudier la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = ue^{-u}$.
c. En déduire les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$ par l'expression :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

a. Montrer que cette fonction admet pour seuls points stationnaires les trois points suivants : $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $N(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $O(0, 0)$.
b. Indiquer la nature des points stationnaires M et N (maximum, minimum, col).
c. Montrer que $f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0)$ ne garde pas un signe constant pour h et k voisins de 0. Conclure quant à la nature du point stationnaire O.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \log y + y \log x + a(x^3 + y^3)$.

a. Calculer les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre 2 en $(1, 1)$.
b. Pour quelles valeurs de a la fonction f admet-elle un extremum local en $(1, 1)$?
Préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Exercice 5. Etudier les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$,
b. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
c. $f(x, y) = (4x - 3y)e^{-(x^2+y^2)}$,
d. $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$.

Exercice 6. Etudier les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a. $f(x, y, z) = z^2(1 + xy) + xy$,
b. $f(x, y, z) = (x + y)e^{x+y-z^2}$.

Exercice 7. Etudier l'existence et la nature des extremums éventuels des fonctions de deux variables réelles définies dans $\mathbb{R}^2$ par les expressions suivantes :

a. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y$,
b. $f(x, y) = x^2 + y^4 - 2y^2$,
c. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ par l'expression :

$$f(x, y) = \cos x \sin y + (\sin(x))^2.$$

Étudier l'existence et la nature des éventuels extremums de f.

Exercice 9. Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence et la nature des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par l'expression suivante :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 8a^4.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 + xy - 1)$.

a. Que valent $f(y, x)$ et $f(-x, -y)$? Que peut-on en déduire sur les points critiques de f ?

b. Déterminer les points critiques de f.

c. Déterminer les extremums locaux de f.

d. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 11. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = (x - y)^2 + \frac{1}{3}(x + y)^3$.

a. Montrer que h possède un seul point critique dans $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas d'extremum local en ce point. *On pourra considérer* $h(x, x)$.

b. On pose $A = [-1, 1]^2$. Montrer que la restriction de h à A possède un maximum et un minimum globaux qui ne sont pas atteints sur $]-1, 1[^2$. Déterminer ces extremums.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par l'égalité $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^6$.

a. Déterminer les points critiques de f.

b. Montrer que $f(y^3, y)$ est du signe de y si $0 < |y| < 2$.
En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

c. Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f aux autres points critiques.

d. Montrer que f admet $\frac{-1}{432}$ comme minimum local atteint en 2 points.

e. Montrer que si $f(x, y) \leq 0$ alors $xy^2 + y^6 \leq 0$ et $x^2 + xy^2 \leq 0$.
En déduire que $f^{-1}(]-\infty, 0[) \subset [-1, 0] \times [-1, 1]$.

f. On pose $A = [-1, 0] \times [-1, 1]$.
Montrer que $f(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ contenant toutes les valeurs négatives de f.

g. Montrer que f admet un minimum global et donner sa valeur.