Fiche d'exercices n° 1
Nombres complexes

Exercice 1.

a. Calculer l'inverse de $z = \frac{1}{3} + \frac{4}{5}i$.

b. Résoudre l'équation $(1+i)z = 3+i$.

c. Résoudre l'équation $\frac{z-4}{z} = i$.

Exercice 2. Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$A = 2i(1+3i); \quad B = \left(\frac{1}{2}+7i\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right); \quad C = \frac{1}{2+3i}; \quad D = \frac{1+2i}{1+3i}; \quad E = \frac{(2+i)^2}{1+5i}.$$

Exercice 3. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$A = \frac{1+i}{1-i}; \quad B = \frac{(2+3i)(1-5i)}{(4+i\sqrt{10})(\sqrt{12}-i)}; \quad C = 1+\cos\theta + i\sin\theta.$$

Exercice 4. Exprimer sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$A = i(1+\sqrt{3}i); \quad B = (1+i)^7; \quad C = \frac{2i}{\sqrt{5}+i\sqrt{15}}; \quad D = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}; \quad E = (1+i)^{2005}.$$

Exercice 5. Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$A = (1+i)^{-7}(1+3i)^2; \quad B = \frac{(3+4i)^2}{e^{\frac{7i\pi}{3}}}; \quad C = e^{\frac{11i\pi}{4}} - (1+2i)e^{\frac{13i\pi}{6}}; \quad D = (1-e^{\frac{i\pi}{3}})^{1789}.$$

Exercice 6. Donner, sous forme algébrique, les racines carrés des nombres complexes suivants :

$$A = -7; \quad B = i; \quad C = 3+4i; \quad D = \frac{-3}{i+1}; \quad E = \frac{e^{\frac{3i\pi}{2}}}{(3-2i)^4}.$$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$z^2+z+1=0; \quad z^4+z^2+1=0; \quad (1+i)z^2+(3+i)z+(1-i)=0;$$
$$z^2-(10+3i)z+(14+18i)=0; \quad z^2+(-1+i)z-2+i=0.$$

Exercice 8.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+8Z+36=0$. .

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+8z^2+36=0$ et placer les solutions dans le plan complexe.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^4=-4; \quad z^6=\sqrt{2}(4-4i); \quad z^9=-27i.$$

Exercice 10. On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}$: $z^4+z^3+z^2+z+1=0 \quad$ (E).

a. Montrer que si $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ est solution de (E), le nombre complexe $u = z+\frac{1}{z}$ vérifie $u^2+u-1=0 \quad$ (E').

b. Résoudre (E'), puis en déduire les solutions de (E).

c. Que valent $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$?

d. Comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Exercice 11.

a. Soit x, y des réels tels que $z = x + iy$ est de module 1.
Calculer en fonction de x et y les racines carrées de z.

b. Calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$.

c. Donner une formule de calcul, par récurrence sur n, de $e^{\frac{i\pi}{2^n}}$, $\cos(\frac{\pi}{2^n})$, $\sin(\frac{\pi}{2^n})$.

Exercice 12. Soient a et b des réels. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$A = 1 - e^{2ia}; \quad B = e^{ia} + e^{ib}; \quad D = \frac{e^{ia} - 1}{e^{ia} + 1}.$$

Exercice 13. Soit x et y deux réels.

a. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler, les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(x)\sin^2(x); \quad B(x) = \cos^2(2x)\sin(y); \quad C(x) = \cos^4(x).$$

b. Pouvez-vous, en utilisant la formule d'Euler, transformer en produit l'expression : $\cos(x) + \cos(y)$?

Exercice 14. Soit $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, sans somme, les nombres :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt); \quad C = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Exercice 15. Soit a un nombre complexe de module 1, non réel, fixé.
Montrer qu'on a $|a - z| = |1 - az|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 16. Soit a, b deux nombres complexes distincts.

a. Calculer la partie réelle de $\frac{a+b}{a-b}$ en fonction de a et b.

b. Montrer que a et b ont même module si et seulement si il existe un réel $\lambda \leq 0$ tel que $(a+b)^2 = \lambda(a-b)^2$.

c. Montrer que a est de module 1 si et seulement si il existe un réel t tel que $a = \frac{ti+1}{ti-1}$.

Exercice 17.

a. Soit M, M' des points d'affixes z, z' dans le plan complexe. Montrer que les droites (OM), (OM') sont perpendiculaires si et seulement si $\Re(\bar{z}z') = 0$, parallèles si et seulement si $\bar{z}z' = z\bar{z}'$.

b. Soit $A(1, 1)$ et $B(-2, 6)$. Donner l'équation en coordonnée complexe de la droite (AB).

c. Pour tout point M d'affixe $z \neq 0$ dans le plan complexe on note P et Q les deux points dont les affixes sont les racines carrées de z. Quel est l'ensemble des points M pour lesquels le triangle MPQ est rectangle en M ?

Exercice 18. Quel est l'ensemble des points M dont les affixes z vérifient les relations :

a. $z\bar{z} - (1+i)\bar{z} - (1-i)z - 2 = 0$?

b. $z\bar{z} - (1+2i)\bar{z} - (1-2i)z - 2 - i = 0$?

c. $(1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 0$?

d. $(1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 2\sqrt{3}$?

Exercice 19. Interpréter géométriquement les applications $M \mapsto M'$, correspondant aux relations suivantes entre les affixes z et z' de M et M' :

$$z' = 2z; \quad z' = z - 5 + 3i; \quad z' = iz + 2 - 2i; \quad z' = (1 - i\sqrt{3})z - i.$$

Exercice 20. Soit P^* le plan complexe privé de l'origine O, et $f : P^* \to P^*$ l'application donnée au niveau des affixes par la formule $f(z) = \overline{(\frac{1}{z})}$. Étudier l'image par f des figures suivantes :

a. $D \setminus \{O\}$, où D est une droite qui passe par O ;

b. $C \setminus \{O\}$, où C est un cercle qui passe par O ;

c. D, où D est une droite qui ne passe pas par O ;

d. C, où C est un cercle qui ne passe pas par O.