Licence 1 **2007-2008**
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 3

Développements limités

1) Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+2x}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad f(x) = \cos(x), \qquad f(x) = \sin(2x^2).$$

2) Examiner la parité de la fonction f définie pour $|x| < 1$ par $f(x) = \operatorname{Log} \dfrac{1+x}{1-x}$ et calculer le $DL_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer les $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$, $g : x \mapsto \cos x \sin x$ et $h : x \mapsto e^{-x} \cos(3x)$.

4) Calculer, lorsqu'ils existent :
   a. le $DL_3(1)$ de $(\operatorname{Log} x)/x^2$,
   b. le $DL_3(2)$ de $\operatorname{Log} x$,
   c. le $DL_3(3)$ de $\sqrt{x-3}$.

5) Étudier l'existence d'un développement limité au voisinage de 0 de $g : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\sin x - \tan x}$.

6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \cos x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.
   a. Quel théorème permet de déduire l'existence de DL_n de l'existence de dérivées $n^{\text{ièmes}}$?
   b. Montrer que si une fonction admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, alors elle est dérivable en 0.
   c. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

7) On pose $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.
   a. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ entier.
   b. Montrer que f admet un $DL_1(0)$, mais que f' n'admet pas de $DL_0(0)$.

8) Donner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9) On se propose de calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^x$.
   a. Effectuer le $DL_4(0)$ de $u(x) = x \operatorname{Log}(1+x)$ et vérifier que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.
   b. Calculer le $DL_4(0)$ de $u(x)^2$, $u(x)^3$ et $u(x)^4$.
   c. Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{u(x)}$.
   d. Calculer le $DL_3(0)$ de $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

10) Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto e^{(e^x)}$.

11) Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$. *On utilisera le* $DL_2(0)$ *de* $\frac{1}{1-u}$.
Quel est le $DL_5(0)$ de f ?

12) Calculer par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
En déduire celles de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ puis $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.
Retrouver le développement de Taylor de f à tout ordre.

13) Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.
En déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$. Retrouver cette valeur en calculant $f^{(4)}(x)$ pour tout x.