Licence 1 **2008–2009**
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n° 1
Nombres réels et fonctions usuelles

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 = 2x-1, \quad x^2+x+1=0, \quad x^2+6x+8=0, \quad x^2+2x-3=0, \quad x^3+x=2x^2, \quad x^3+2x^2-6x=0,$$
$$x^3-5x^2+6x=0, \quad 2x^3-3x^2-17x-12=0, \quad x^4-x^2-1=0, \quad x^4-8x^2+15=0,$$
$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}+1, \quad x+\frac{1}{x}=2, \quad x+\frac{1}{x}=1,$$
$$\sqrt{2x+1}=x+2, \quad \sqrt{1-2x}=x-1, \quad x-\sqrt{x}-1=0, \quad x-\sqrt{x-1}-2=0.$$

Exercice 2. Déterminer les réels m tels que l'équation

$$(2m-1)x^2+2(m+1)x+m+3=0$$

admette deux racines réelles distinctes et inférieures ou égales à 1. [$m \in \,]-4,-4/5] \cup]1/2, 1[$]

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes : [$\pm\pi/6+2\pi\mathbb{Z}$, $(-7\pi/12+2\pi\mathbb{Z}) \cup (13\pi/60+2\pi\mathbb{Z}/5)$, $\{-\pi/4, \pi/12\}+\pi\mathbb{Z}$, $\{-\pi/6, -5\pi/6\}+2\pi\mathbb{Z}$]

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=1, \quad 2(\sin x)^2-3\sin x-2=0.$$

Exercice 4. Démontrer que les inégalités suivantes sont vraies pour toute paire x, y de réels positifs. On précisera les cas d'égalité :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad x+\frac{1}{x} \geq 2.$$

Exercice 5. Montrer que $||\sin x|-|\sin y|| \leq |\sin(x+y)| \leq |\sin x|+|\sin y|$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$3x+1>1-2x, \quad x^2-2x+1 \geq 0, \quad x^2+6x+8 \leq 0, \quad x^3-5x^2+6x \leq 0,$$
$$\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0, \quad \frac{2x-10}{x+1} \geq x-5x-2, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}<0,$$
$$\sqrt{1-x}>2x-3, \quad \sqrt{x-1}>2x-3, \quad \sqrt{x+1}<\sqrt{2-x}, \quad \log(2-x^2) \geq 0,$$
$$|x+1|<|2-x|, \quad |x^2+x+1| \leq 3, \quad |x+2|+\left|\frac{1}{x}+2\right|>5, \quad |x+2|+\left|\frac{1}{x}+2\right|>0.$$

Exercice 7. Montrer, en le calculant, que le nombre $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ est un entier. [2]

Exercice 8. Simplifier les expressions : $\dfrac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[5]{64^3}\,\sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[5]{16}\,\sqrt[3]{16^4}\,\sqrt[20]{2048}}$, $\dfrac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$. [2, 4]

Exercice 9. Simpifier les expressions suivantes, après avoir précisé pour quelles valeurs de x elles sont définies.

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(e^{e^x})), \quad x^{\frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, x)}{\mathrm{Log}\, x}},$$
$$\mathrm{ch}(\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2-1})), \quad \mathrm{sh}(\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})).$$

[x, $\operatorname{Log} x$, x, x]

Exercice 10. Montrer qu'on a $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Montrer que pour tout entier p et tout réel x, on a $\mathrm{E}(x+p) = \mathrm{E}(x) + p$.

Exercice 12. Trouver tous les réels x tels que $E(\sqrt{x}) = \sqrt{E(x)}$. [$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[k^2, k^2+1\right[$]
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(\sqrt{x^2+1}) = 2$. [$x \in \left]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right[$]

Exercice 13. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+3), \quad \sum_{k=0}^{n}(k+2), \quad \sum_{k=3}^{n}(k+1).$

Exercice 14.

a) Calculer la « somme télescopique » $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$ pour tout n.
b) Développer et simplifier l'expression $(k+1)^3 - k^3$.
c) En utilisant a) et b), exprimer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ sans utiliser le symbole somme.
d) Exprimer sans utiliser le symbole somme la valeur des sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1).$$

e) Imaginer une méthode pour exprimer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ sans utiliser le symbole somme.
Effectuer le calcul.

Exercice 15.

a) On fixe un entier n. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sum_{k=1}^{n}(x-k) = 0$.

b) Même question avec l'équation : $6\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2 = n(n+1)(2n+1)$. On utilisera le résultat de l'exercice 14.

Exercice 16. Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
(On pourra calculer $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout k.)

Exercice 17. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$, et calculer cette somme lorsque $q = 1$.

Exercice 18.

a) Montrer que pour tous $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on a $x^n - 1 \geq n(x-1)$.
L'inégalité est-elle toujours stricte ? On pourra utiliser l'exercice 17.
b) Soit $n \geq 2$ un entier. Prouver qu'on a :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} > \frac{1+3+3^2+\ldots+3^n}{1+2+2^2+\ldots+2^n} > \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

Exercice 19. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

a) Prouver qu'on a $\quad (1-x)S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k - nx^n \quad$ pour tous x, n.
b) En déduire l'expression de $S_n(x)$ en fonction de n et x, sans symbole somme.
On pourra distinguer les cas $x = 1$ et $x \neq 1$.
c) Imaginer de même une méthode pour exprimer directement en fonction de n et x la somme :

$$T_n(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1}.$$

d) Voyez-vous un rapport entre les formules trouvées et des calculs de dérivées de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 20. Exprimer les produits suivants sans le signe produit, n étant un entier naturel non nul :

$$\prod_{k=1}^{n} 2, \quad \prod_{k=1}^{n} 2^k, \quad \prod_{k=1}^{n}(n+1-k), \quad \prod_{k=1}^{2n}(n+1-k), \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 21.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x(x+1)(x+2)(x+3) > 0$.

b) Même question avec l'inéquation : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x-k) > 0$, n étant un entier naturel fixé.
Le réel $-\sqrt{\pi}$ est-il solution ?

Exercice 22. Étudier les ensembles de définition des fonctions définies par les formules suivantes :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}, \quad f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}},$$
$$f(x)=\log(x+1)-\log(x), \quad f(x)=\log\left(\frac{x+1}{x}\right),$$
$$f(x)=\frac{1}{x-\mathrm{E}(x)}, \quad f(x)=\sqrt{x-\mathrm{E}(x)-\tfrac{1}{2}}.$$

Exercice 23. Dire, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont paires ou impaires.

$f(x)=x^3+x$, $\quad f(x)=x^3+x+1$, $\quad f(x)=C$ (constante), $\quad f=\mathrm{id}$, $\quad f(x)=\mathrm{E}(x)$, $\quad f(x)=(x-\mathrm{E}(x)-1/2)^2$.

Montrer que la dernière de ces fonctions est périodique.

Exercice 24. Exprimer le plus simplement possible les composées de fonctions suivantes, en mettant les polynômes sous forme développée :

a) $f\circ g$ et $g\circ f$ avec $f(x)=x^3$, $g(x)=2-x$;

b) $f\circ f$, $f\circ(f\circ f)$, $(f\circ f)\circ f$, $f\circ(f\circ(f\circ f))$ avec $f(x)=-\frac{1}{x+1}$.

c) $f\circ g$ et $g\circ f$ avec $g(x)=\mathrm{E}(x)$, $f(x)=x-\mathrm{E}(x)$.

Exercice 25.

a) Si $f(x)=ax+b$ et $g(x)=a'x+b'$ sont deux fonctions affines, montrer que $f\circ g$ est affine et calculer sa pente et son ordonnée à l'origine en fonction de a, a', b, b'.

b) Trouver toutes les fonctions affines f telles que $f\circ f=\mathrm{id}$.
Existe-t-il d'autres fonctions ayant cette propriété ?

c) Montrer que les seules fonctions affines f telles que $f\circ E=E\circ f$ sont celles mises en évidence à l'exercice 11.

Exercice 26. Soit $x<y$ deux nombres réels, et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t)=\dfrac{x+ty}{1+t}$.
Étudier la monotonie de f (sans calculer de dérivée). $[f(t)-f(s)=(t-s)(y-x)/(1+t)(1+s)]$

Exercice 27. Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Pour tout $x\in I$ on pose

$$M(x)=\max(f(x),g(x)) \quad \text{et} \quad m(x)=\min(f(x),g(x)).$$

Montrer que les fonctions M et m sont croissantes si c'est le cas de f et de g.

Exercice 28. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x)=x^5, \quad f(x)=\sin(x)\cos(x), \quad f(x)=xe^x, \quad f(x)=\frac{1}{x^2}, \quad f(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad f(x)=\frac{1}{\log x}.$$

Exercice 29. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = (\sin x)^3, \quad f(x) = \tan(5x), \quad f(x) = e^{x^2},$$
$$f(x) = 1 - 2(\cos x)^2, \quad f(x) = \log(3x), \quad f(x) = \log(\sin(5x)).$$

Exercice 30. Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad f(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 31. Étudier et tracer le graphe des fonctions :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}, \quad f(x) = \sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 32. Fonctions trigonométriques hyperboliques. On pose pour tout x réel :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Étudier les fonctions ch et sh, et tracer leur graphe.

b) Montrer que sh est bijective.

c) Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$ d'inconnue x, et en déduire l'expression de la fonction réciproque de sh.