Licence 1 **2008–2009**
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 2
Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1. Calculer les limites suivantes en factorisant les termes dominants :

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{27x^3+2x+3}{x^{18}-14x+2}, \qquad m = \lim_{x\to 0} \frac{-10x^5+2x^3}{15x^4+20x^2}, \qquad n = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^9+x^4-2x^3}{x^{17}-x^7+x^3},$$
$$o = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^9-x^4-2x^2}{x^7-3x^4+2x^3}, \qquad p = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3+2}{x^2-4x+4}, \qquad q = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^4+x-1}{(x-1)^3+(x-1)^2},$$
$$r = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3+2(x-1)^2}{(x-1)^2+(x-1)^3}, \qquad s = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{3x-3}, \qquad t = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1},$$
$$u = \lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)^3+2}{x^2-4x+4}, \qquad v = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|x^4+x^3-16x}{1-x-12x^5}, \qquad w = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+2x^3+4x^2+8x}{1-x-12x^5}.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes en se ramenant en 0 :

$$l = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}, \qquad m = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-4x}, \qquad n = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+3x^2-4},$$
$$o = \lim_{x\to -1} \frac{x^4+5x^3+9x^2+7x+2}{x^4+2x^3-2x-1}, \qquad p = \lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{(x^2+4x+4)\sqrt{2-x}}, \qquad q = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sin(\pi x)}{x^2+4x-5},$$
$$r = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}}{x^3-3x-2}, \qquad s = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x+\cos x-2}{\sin^2 x}.$$

Exercice 3. Étudier si les limites suivantes existent, et si oui les calculer :

$$l = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(x^3+1)}{x^3(x^3-1)}, \quad m = \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}), \quad n = \lim_{x\to +\infty}((x+1)^2-x^2), \quad o = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^a+1}{x^b+x},$$
$$p = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}, \qquad q = \lim_{x\to 0}(x^{-a}-x^{-b}), \qquad r = \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^a+x}-\sqrt{x^b+1}).$$

On discutera le cas échéant suivant la valeur des paramètres a, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,\ 1\}$.

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$).

a) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim_{x\to +\infty} f(2x) - f(x) = 0$?
b) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim_{x\to +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$?
(On pourra faire apparaître la dérivée de f en 1.)

Exercice 5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{E}(x)}{x} = 1$.

Exercice 6. Soit f une fonction, x_0, l des réels. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
Montrer que si $l \notin \mathbb{Z}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \mathrm{E} \circ f(x) = \mathrm{E}(l)$. Que se passe-t-il si $l \in \mathbb{Z}$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la définition des limites, que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}.$$

Exercice 8. Dans cet exercice on considère des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ entier.

a) Trouver toutes les fonctions périodiques qui admettent une limite en $+\infty$.
b) Trouver toutes les fonctions vérifiant $f(x) = f(2x)$ pour tout x et qui admettent une limite finie en 0.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) À l'aide la définition d'une limite finie, écrire ce que signifie la phrase suivante :
« f n'admet pas de limite finie en x_0 ».

b) Soit $\varepsilon_0 > 0$. Montrer que la propriété suivante, si elle est vraie, interdit à f d'avoir une limite finie en x_0 :
« Pour tous a, b tels que $a < x_0 < b$, il existe x_1, $x_2 \in]a, b[$ tels que $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0$ ».

c) On suppose que $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existent.
Montrer que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

d) Soit $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f n'admet pas de limite en 0.

e) Soit $f(x) = \mathrm{E}(x)$. Montrer que f ne possède pas de limite en 0. Étudier la limite de $\mathrm{E}(x^2)$ en 0.

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que le taux d'accroissement $T(x, y)$ entre deux réels distincts x et y est donné par l'expression proposée :

a) pour $f(x) = x^3$, $T(x, y) = x^2 + xy + y^2$;

b) pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $T(x, y) = -\frac{1}{xy}$;

c) pour $f(x) = \sqrt{x}$, $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Utiliser les calculs précédents et la définition de la dérivée pour retrouver la valeur de $f'(x_0)$. Pouvez-vous généraliser ces résultats au cas de $f(x) = \sqrt[n]{x}$?

Exercice 11. Posons $f(x) = x^{x+x^{-1}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f ainsi définie sur $\mathbb{R}_+$ est-elle continue ? dérivable ? Sa dérivée est-elle continue ? *(La dernière question est assez calculatoire.)*

Exercice 12. Rappelons que l'on note E la fonction « partie entière ».
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 1 ?

- $f(x) = E(x)^2$
- $g(x) = (x - 1)E(x)$
- $h(x) = (x - 1)^2 E(x)$

Exercice 13. On pose $f(x) = (x - E(x)) \sin \dfrac{\pi x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est périodique et en déterminer une période.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que f est continue en n.

c) En quels entiers f est-elle dérivable ?

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

a) Montrer que $\frac{f(\sin x)}{x}$ a une limite quand x tend vers 0 et calculer cette limite.

b) Soit n un entier naturel, montrer que $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^n - 1) - f(x-1)}{x-1}$ existe et la calculer.

c) Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{f(2x)^2 - f(3x^2)}{x^2}$ existe et la calculer.

Rappel. On dit que les graphes de deux fonctions sont *tangents* en un point s'ils se coupent en ce point et y ont la même tangente.

Exercice 15. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a $\log x < x - 1$.
On pose $u(x) = x^e$ et $v(x) = e^x$ pour $x > 0$.

a) Comparer u et v sur $\mathbb{R}_+^*$. *(On pourra prendre le* log *puis poser $y = x/e$.)*

b) Montrer que les graphes de u et v sont tangents en un unique point.

c) Représenter ces graphes et leur tangente commune sur un dessin.

Exercice 16. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

a) Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est tangente à $\mathcal{P}$ si et seulement si $4b + a^2 = 0$.

b) Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites tangentes à $\mathcal{P}$ de pentes $a_1 \neq a_2$.
Déterminer en fonction de a_1 et a_2 les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

c) Montrer que deux tangentes à $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires **ssi** elles se coupent sur la droite $y = -1/4$.