Licence 1 **2008–2009**
Mathématiques **EM11**

FICHE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 3
Développements limités et applications

Notation. Dans cette feuille la notation « $DL_n(a)$ » signifie « développement limité à l'ordre n en a ».

[*Utilisation du formulaire*]

Exercice 1. Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+2x}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad h(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad i(x) = \cos(x), \qquad j(x) = \sin(2x^2).$$

Exercice 2. Donner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{(x^2)}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 3. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d et une fonction $\varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniques tels que

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Donner la valeur de a, b, c et d.

Exercice 4. Examiner la parité de la fonction f définie pour $|x| < 1$ par

$$f(x) = \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

et calculer le $DL_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[*Produit*]

Exercice 5. Calculer les $DL_3(0)$ de

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}, \quad g : x \mapsto \cos x \sin x, \quad h : x \mapsto e^{-x}\cos(3x), \quad i : x \mapsto \operatorname{Log}(1+x)\operatorname{Log}(1-x).$$

Exercice 6. Calculer les $DL_5(0)$ de

$$f : x \mapsto \operatorname{ch}(x)\sin(x), \quad g : x \mapsto \sqrt{1-x^3}\ \sqrt[3]{1+x^2}, \quad h : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}, \quad i : x \mapsto \frac{\sin x}{\exp x}.$$

[*Ailleurs qu'en* 0]

Exercice 7. Calculer, lorsqu'ils existent :

a) les $DL_3(1)$ de $(\operatorname{Log} x)/x^2$ et $e^x\sqrt{x}$,
b) les $DL_2(\frac{1}{4})$ de $\operatorname{Log} x$ et $\cos(\pi x)$,
c) le $DL_3(3)$ de $\sqrt{x-3}$.

Exercice 8. Calculer le $DL_4(1)$ des fonctions

$$f : x \mapsto \sqrt{x}\ \operatorname{Log} x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

[*Composition, inverse*]

Exercice 9. On se propose de calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^x$.

a) Effectuer le $DL_4(0)$ de $u(x) = x\,\mathrm{Log}(1+x)$ et vérifier que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.

b) Calculer le $DL_4(0)$ de $u(x)^2$, $u(x)^3$ et $u(x)^4$.

c) Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{u(x)}$.

d) Calculer le $DL_3(0)$ de $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 10. Calculer les $DL_4(0)$ de

$$f : x \mapsto e^{(e^x)}, \quad g : x \mapsto \mathrm{Log}(\cos x), \quad h : x \mapsto \sqrt{1-\sin(x)}.$$

Exercice 11. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$. *On utilisera le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-u}$.*
Quel est le $DL_5(0)$ de f ?

[*Taylor-Young, dérivation*]

Exercice 12. Calculer par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
En déduire celles de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ puis $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.
Retrouver le développement de Taylor de f à tout ordre.

Exercice 13. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.
En déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$. Essayer de retrouver cette valeur en calculant $f^{(4)}(x)$ pour tout x.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \cos x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

a) Quel théorème permet de déduire l'existence de DL_n de l'existence de dérivées $n^{\text{ièmes}}$?

b) Montrer que si une fonction admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, alors elle est dérivable en 0.

c) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

Exercice 15. On pose $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ entier.

b) Montrer que f admet un $DL_1(0)$, mais que f' n'admet pas de $DL_0(0)$.

[*Limites*]

Exercice 16. Calculer les limites en 0 des fonctions définies comme suit :

$$f(x) = \frac{2x^3+x^4}{3x^3+x^5}, \qquad g(x) = \frac{x^4+x^5+x^6}{x^2-2x^3+3x^4}, \qquad h(x) = \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x},$$

$$i(x) = \frac{3^x - 2^x}{x}, \qquad j(x) = \frac{x - \sin x}{(\tan x)^3}, \qquad k(x) = \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\cos(\sin x) - e^x},$$

$$l(x) = \frac{\ln(1+\tan x) - \sin x}{\tan x - \sin x}, \qquad m(x) = \frac{\ln(\cos(\pi x))}{\ln(\cos(2\pi x))}, \qquad n(x) = \frac{\mathrm{sh}\, x + \sin x - 2x}{x(\mathrm{ch}\, x + \cos x - 2)}.$$

Exercice 17. Déterminer les limites suivantes :

$$l = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^3-1}, \quad m = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}, \quad n = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^3+x^2-x-1}, \quad o = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}}{(x-2)^2}.$$

Exercice 18. Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{2}{(\cos x)^2} + \dfrac{1}{\mathrm{Log}(\sin x)}$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
On réduira au même dénominateur après avoir posé $u = x - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19.

a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}$.

b) Soit f une fonction impaire de classe C^3 au voisinage de 0. On suppose que $f'(0) = 1$ et on pose $f^{(3)}(0) = a$. Calculer en fonction de a la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2}$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\tan x)^2} - \frac{1}{x^2}$.

Exercice 20. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^5}$.

[*Tangentes, asymptotes*]

Exercice 21. On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, \quad f_2(x) = \frac{1+x+x^2}{1-2x+3x^2}.$$

a) Calculer $f_i'(0)$ pour $i = 1, 2$.
En déduire l'équation $y = ax + b$ de la tangente au graphe de f_i au point d'abscisse 0.

b) Écrire le $DL_3(0)$ de f_1 et le $DL_2(0)$ de f_2. Retrouver le résultat de la question précédente.
Quelle méthode préférez-vous ?

c) En utilisant le résultat de la question b, étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour x proche de 0.
Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0 ?

Exercice 22. On définit trois fonctions f_1, f_2, f_3 en posant

$$f_1(x) = x\Big(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\Big), \quad f_2(x) = \Big(2x + 3 + \frac{1}{x}\Big)e^{\frac{1}{x}}, \quad f_3(x) = \sqrt[4]{16x^4 + x^3 + 1}.$$

a) Trouver trois fonctions g_i, $i = 1, 2, 3$, telles que $f_i(x) = xg_i(\frac{1}{x})$.

b) Donner le développement limité à trois termes en 0 des fonctions g_i.

c) Pour chaque fonction f_i, trouver des réels a, b et c tels que

$$f_i(x) - (ax + b) = \frac{1}{x}(c + \varphi(x)),$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Montrer que le graphe de f_i admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. Quelle est la position du graphe par rapport à cette asymptote ?

Exercice 23. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le cercle de centre $(4, 3)$ et de rayon 5, et C_1 l'intersection de C avec le demi-plan d'équation $y \leq 3$. On pose $g(x) = 3 - \sqrt{9 + 8x - x^2}$. On note P_a la parabole d'équation $y = -\frac{4}{3}x + ax^2$.

a) Faire une figure.

b) Montrer que C_1 a pour équation $y = g(x)$.

c) Déterminer le développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

d) Quelle est l'équation de la tangente à C en $(0, 0)$?

e) Comparer les positions relatives au voisinage de $(0, 0)$ de C et des trois paraboles $P_{1/6}$, $P_{1/2}$ et $P_{25/54}$.

[*Études de fonction*]

Exercice 24. On se propose de tracer le graphe de $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Étudier la parité et les variations de f.

b) Placer les tangentes au graphe de f aux points d'abscisses 0, 1, $\sqrt{3}$, 2.

c) Étudier la position du graphe par rapport à ses tangentes aux points ci-dessus.

d) Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 25. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 2}$: domaine de définition, parité, tableau de variations, branches infinies.