Licence 1 **2008–2009**
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n° 4
Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\,; \qquad g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,; \qquad h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\,;$$

$$i(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,; \qquad j(x,y) = 2+\sqrt{-(x-y)^2}\,; \qquad k(x,y) = \mathrm{Log}(x^2-y).$$

Exercice 2. Déterminer les ensembles de définition des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x,y,z) = \mathrm{Log}(xyz); \qquad g(x,y,z) = \sqrt{x+y}+\sqrt{z}.$$

Exercice 3. Calculer les dérivées partielles des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,; \qquad g(x,y) = \mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+y^2})\,; \qquad h(x,y) = \mathrm{Log}\left(\tan\frac{x}{y}\right);$$

$$i(x,y) = (xy)^z\,; \qquad j(x,y) = \frac{xy^2}{x+y}\,; \qquad k(x,y) = \mathrm{Log}\left(1+\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 4. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions définies par les expressions suivantes, et vérifier la validité du théorème de Schwarz :

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}; \qquad g(x,y) = x^y; \qquad h(x,y,z) = xz^3+y^2z+xy^4z.$$

Exercice 5. Déterminer une équation du plan tangent au point spécifié à chacune des surfaces suivantes :

$$z = 2x^2+y^2 \quad \text{en} \quad (1,1,3)\,; \qquad z = y^2-x^2 \quad \text{en} \quad (-4,5,9)\,; \qquad z = \mathrm{Log}(2x+y) \quad \text{en} \quad (-1,3,0).$$

Exercice 6. On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$ par l'expression :

$$f(x,y) = 2x^2y+y^2+2x^2.$$

a) Montrer que les points critiques de f sont $A(0,0)$, $B(1,-1)$ et $C(-1,-1)$.
b) Montrer que A est un minimum local. *On pourra montrer que $f(x,y)$ est positif si $|y| \leq 1$.*
c) Déterminer la nature des cinq courbes inscrites dans le graphe de f dont les équations sont

$$x=0\,; \quad y=0\,; \quad x=1\,; \quad y=-1\,; \quad x=-y.$$

d) Montrer que B et C ne sont ni des minimums, ni des maximums.
e) La fonction f admet-elle un maximum global ? un minimum global ?

Exercice 7. Rechercher les points critiques des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^2+4y^2+2x-4y; \qquad g(x,y) = x^2+y^4-2y^2; \qquad h(x,y) = x^3+y^3+9xy-3^3.$$

Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 8. Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence et la nature des extremums éventuels de la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par l'expression suivante :

$$f(x,y) = x^4+y^4-4a^2xy+8a^4.$$

Exercice 9. Décomposer 120 en somme de 3 nombres x, y et z de telle sorte que la somme des produits deux à deux de ces trois éléments soit maximale.

Exercice 10. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume égal à 216 cm^3, déterminer celui dont l'aire latérale totale est minimale. Pensez-vous que ce résultat soit généralisable à un parallélépipède rectangle de volume V quelconque fixé ?