

FICHE D'EXERCICES N O 3

 tudes de fonctions

Toutes les fonctions considérées dans cette fiche sont des fonctions d'une variable réelle.

[Généralités]

Exercice 1. Calculer :

- les images des nombres $\frac{5}{6}$ et 2 par les fonctions $f : x \mapsto \frac{5}{6x+5}$ et $g : x \mapsto \frac{-10}{3x+40}$;
- les images des nombres $-\frac{5}{6}$ et $-\frac{7}{5}$ par les fonctions $f : x \mapsto \frac{12}{18x+15}$ et $g : x \mapsto -\frac{4}{5}x - \frac{28}{15}$;
- les images des nombres $\frac{2}{5}$ et $-\frac{3}{7}$ par les fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \frac{2}{x}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$;
- les antécédents des nombres $\frac{14}{9}$ et $\frac{10}{21}$ par les fonctions $f : t \mapsto \frac{5}{12}t + \frac{1}{3}$ et $g : x \mapsto \frac{3}{4}x - \frac{5}{14}$;
- les antécédents des nombres $-\frac{4}{9}$ et $\frac{2}{25}$ par les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$;
- les antécédents des nombres $\frac{12}{27}$ et 1 par les fonctions $f : x \mapsto \frac{1+x}{x-5}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x-1/2}$.

Exercice 2. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{2x^2 - 2x - 4}, & e(x) &= \frac{2x}{x-1} + \sqrt{x}, & f(x) &= \log(4x^2 + 4x + 1), \\ g(x) &= \sqrt{x-2} \log(6-x), & h(x) &= \frac{\log(2x-1)}{x+2}, & i(x) &= \frac{2x}{1-|x-2|} \sqrt{4-|x|}, \\ j(x) &= \frac{\sin x}{2+\cos x}, & k(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}, & l(x) &= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, & m(x) &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}, \\ n(x) &= \log(x+1) - \log(x), & o(x) &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right), & p(x) &= \log(4-x^2)\sqrt{x-4}. \end{aligned}$$

[Dérivation]

Exercice 3. Déterminer la dérivée et le nombre d eriv e en 2 de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} d(x) &= -5\sqrt{x}, & e(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 5t - 1, & f(x) &= (2x+1)(3x^2+x+1), \\ g(x) &= (-x^3+2)(2e^x+\log x), & h(x) &= (2x^2+4x)\sqrt{x}, & i(x) &= \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} - 1, \\ j(x) &= \frac{e^x-2}{3+e^x}, & k(x) &= \frac{-4x+2}{x-2}, & l(x) &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}, \\ m(x) &= (1+x^2)e^x, & n(x) &= \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right), & o(x) &= \frac{1+\log(x)}{1+e^x}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} d(x) &= (\sin x)^3, & e(x) &= \tan(5x), & f(x) &= e^{(x^2)}, & g(x) &= 1 - 2(\cos x)^2, \\ h(x) &= \log(3x), & i(x) &= \log(\sin(5x)), & j(x) &= \cos\left(\frac{2x+1}{x-1}\right), & k(x) &= \frac{e^{2x}-e^x+1}{2e^x+1}, \\ l(x) &= \tan(\log x), & m(x) &= \sqrt{2+\log x}, & n(x) &= \cos\sqrt{2x+1}, & o(x) &= \log(\cos(\exp x)). \end{aligned}$$

Exercice 5. Déterminer les extremums des fonctions suivantes sur les intervalles pr ecis es :

$$\begin{aligned} e : x &\mapsto \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4} \text{ sur } I = [-1, 3]; & f : x &\mapsto \frac{2x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \text{ sur } I = [3/2, 4]; \\ g : x &\mapsto \frac{4x^2 + 3}{(x-1)^2} \text{ sur } I = [-3, 6]. & h : x &\mapsto 2\sqrt{x^2 - 9} - 3x \text{ sur } I = [2, 5]; \end{aligned}$$

[*Limites*]

Exercice 6. Calculer les limites suivantes en factorisant les termes dominants :

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27x^3 + 2x + 3}{x^{18} - 14x + 2}, & m &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-10x^5 + 2x^3}{15x^4 + 20x^2}, & n &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^9 + x^4 - 2x^3}{x^{17} - x^7 + x^3}, \\
 o &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^9 - x^4 - 2x^2}{x^7 - 3x^4 + 2x^3}, & p &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}, & q &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^4 + x - 1}{(x-1)^3 + (x-1)^2}, \\
 r &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 2(x-1)^2}{(x-1)^2 + (x-1)^3}, & s &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3}, & t &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}, \\
 u &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}, & v &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|x^4 + x^3 - 16x}{1 - x - 12x^5}, & w &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x}{1 - x - 12x^5}.
 \end{aligned}$$

Exercice 7. Calculer les limites suivantes en factorisant les termes dominants :

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x^3), & m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x^5), & n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2(\log x)^2 - x), \\
 o &= \lim_{x \rightarrow 0} (xe^{2x} + \log x), & p &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - x^4 \log x), & q &= \lim_{x \rightarrow 0} (\log x + 3e^x (\log x)^2), \\
 r &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{-5}e^{2x} - e^x \log x), & s &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x^2} - x^3 e^x).
 \end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes en se ramenant en 0 :

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}, & m &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}, & n &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}, \\
 o &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}, & p &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x^2 + 4x + 4)\sqrt{2-x}}, & q &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sin(\pi x)}{x^2 + 4x - 5}, \\
 r &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}{x^3 - 3x - 2}, & s &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

Exercice 9. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{2x^2}}{\log(1 + x^4)}$.

[*Tangentes, asymptotes*]

Exercice 10. Déterminer les équations des tangentes aux graphes des fonctions suivantes aux points précisés :

- $f : x \mapsto x^2 + 3x + 2$ aux points d'abscisses 0 et $-3/2$;
- $f : x \mapsto x \cos(\pi x)$ aux points d'abscisses 0, $1/2$ et $3/2$;
- $f : x \mapsto \exp(x^2 - 2x + 1)$ aux points d'abscisses 0, 1 et 2;
- $f : x \mapsto (x + 1)^{-2} \sqrt{x}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Illustrer par des dessins.

Exercice 11. Déterminer les équations des asymptotes en $+\infty$ aux graphes des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 4}{x}, \quad g(x) = \frac{4x - 6}{x + 2}, \quad h(x) = \frac{5x^2 - 6x + 4}{x - 1}, \quad i(x) = \frac{2x^3 - 3x}{1 - x^2}, \quad j(x) = \frac{x^3 + 4}{x + 2}.$$

Exercice 12. Étudier les fonctions suivantes et tracer leur graphe :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$