université de Caen Basse-Normandie UFR Sciences	ANNÉE 2011-2012 **Première session** **03/01/2012**

LICENCE Sciences et Technologie 3e année
Contrôle terminal ELM51T
Espaces Métriques
3 heures

Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Chaque candidat doit noter son nom en début d'épreuve dans le coin de la copie et le cacher par collage <u>après</u> le pointage. Il doit, en outre, noter son numéro de place sur chacune de ses copies.

Question de cours.
Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est continue **ssi** son noyau est fermé.

Exercice 1. On note $\bar{B} = \bar{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ relative à la norme $N_\infty : (x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$. On considère le système d'équations

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 6x & = & 1 - x^2 + 3y, \\ 6y & = & x + 2y^2. \end{array} \right.$$

1. Représenter $\bar{B}$ et montrer que $\bar{B}$ est un espace complet pour la distance induite par N_∞.
2. Écrire le système (S) sous la forme d'un problème de point fixe $(x,y) = f(x,y)$.
   Montrer que f est uniformément strictement contractante sur $\bar{B}$.
   En déduire que (S) admet une solution unique dans $\bar{B}$.
3. Montrer que (S) admet au moins deux solutions dans $\mathbb{R}^2$.
   L'application f est-elle uniformément strictement contractante sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. On fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $SL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices dont le déterminant est égal à 1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(a_{ij})_{ij}\| = \max_{ij} |a_{ij}|$.

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. On fixe $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(tA)$ pour tout $t > 0$.
   Dire pourquoi l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto tA$ est continue.
3. Montrer que le complémentaire de $SL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
4. $SL_n(\mathbb{R})$ est-il compact ?

suite au verso

Exercice 3. On note E l'espace des fonction continues $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$. On considère les sous-espaces suivants de E :

$$\begin{aligned} F &= \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ paire}\}, \\ G &= \{P : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale}\}, \\ H &= \{P : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale et paire}\}. \end{aligned}$$

1. Rappeler quel théorème permet de montrer que G est dense dans E.
2. Montrer que F est fermé dans E.
3. Soit f un élément de F, et $(P_n)_n$ une suite d'éléments de G qui converge vers f.
   a. On pose $Q_n(t) = \frac{1}{2}(P_n(t) + P_n(-t))$. Montrer que $(Q_n)_n$ converge vers f dans E.
   b. Montrer que H est dense dans F.
4. On recherche les fonctions $f \in E$ vérifiant la propriété

$$\text{(I)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-1}^{1} f(t)t^{2n}\mathrm{d}t = 0.$$

   a. Montrer que si f est paire et vérifie (I) alors $f = 0$.
   b. Montrer que les fonctions vérifiant (I) sont les fonctions impaires.

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique.
Rappelons que pour $a \in E$ et $F \subset E$ on note $d(a,F) = \inf\{d(a,x) \mid x \in F\}$.

1. Soit a un point de E et F une partie compacte de E.
   a. Montrer que la fonction $f : F \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(a,x)$ est minorée et atteint son minimum.
   b. Montrer qu'il existe $b \in F$ tels que $d(a,b) = d(a,F)$.
2. On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie.
   Soit a un point de E et F une partie fermée de E.
   a. On fixe $r > d(a,F)$ et on pose $F' = F \cap \bar{B}(a,r)$.
      Montrer que F' est compact et que $d(a,F) = d(a,F')$.
   b. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $d(a,b) = d(a,F)$.

On va maintenant montrer que le résultat démontré aux questions 1b et 2b n'est plus nécessairement vrai si F est un fermé dans un espace vectoriel normé de dimension infinie.

On dit qu'un espace métrique F est *uniformément discret* s'il existe $\alpha > 0$ tel que $d(x,y) > \alpha$ pour tous $x \neq y$ dans F.

3. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans un espace uniformément discret.
   a. Montrer que $(x_n)_n$ est constante à partir d'un certain rang.
   b. Montrer qu'un espace uniformément discret est complet.
4. Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ bornées, muni de la norme $\|f\| = \sup_{k\in\mathbb{N}^*} |f(k)|$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'élément $f_n \in E$ donné par $f_n(k) = 0$ pour $k \neq n$, et $f_n(n) = 1 + \frac{1}{n}$.
   On pose $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset E$.
   a. Montrer que F est uniformément discret pour la distance induite par la norme de E.
   b. En déduire que F est une partie fermée de E.
   c. Déterminer la distance $d(a,F)$, où $a = 0 \in E$ est la fonction nulle. Conclusion ?