Espaces complets

Exercice 1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est-il complet pour les distances suivantes ?

$$d_1(x,y) = |x^3 - y^3|, \quad d_2(x,y) = |e^x - e^y|, \quad d_3(x,y) = \log(1 + |x-y|).$$

Indications. Si (x_n) est une suite de Cauchy pour d_1, on pourra considérer la suite (x_n^3). On pourra également considérer la fonction « cube » comme une isométrie relativement à des distances bien choisies. Pour d_3 on pourra utiliser l'encadrement $t\log(2) \leq \log(1+t) \leq t$ pour $t \in [0,1]$.

Exercice 2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est-il complet pour les distances suivantes ?

$$d_1(k,l) = |k-l|, \quad d_2(k,l) = \delta_{k,l}(1 + k^{-1} + l^{-1}), \quad d_3(k,l) = |k^{-1} - l^{-1}|.$$

Vérifier que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $k \mapsto k+1$ est strictement contractante pour d_2 mais n'a pas de point fixe.
On étend d_3 à $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ en posant $d_3(k,\infty) = d_2(\infty,k) = k^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'espace (X, d_3) est-il complet ?

Indications. On précisera quelles sont les suites convergentes et les suites de Cauchy pour d_1 et d_2. Pour d_3, on pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Exercice 3. Montrer que les espaces métriques (E,d) et espaces vectoriels normés (E,N) suivants sont complets.

a. $E = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, $d(k^2, l^2) = |k^2 - l^2|$.
b. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y \leq \cos(x+y)\}$, $d((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$.
c. $E = M_n(\mathbb{C})$, $N(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$.
d. $E = O_n(\mathbb{R})$, $d(A,B) = \sqrt{n - \mathrm{Tr}({}^tAB)}$.
e. $E = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 0\}$, $N((x_i)) = \sum_i |x_i|$.
f. $E = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)^2 dt \leq 1\}$, $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

Exercice 4. On fixe une énumération des rationnels : $\mathbb{Q} = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $r_n \neq r_m$ pour $n \neq m$.
On considère $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on pose pour tous $n \in \mathbb{N}$, x, $y \in X$:

$$d_n(x,y) = \big||x-r_n|^{-1} - |y-r_n|^{-1}\big|, \quad d'_n(x,y) = \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \quad \text{et}$$

$$d'(x,y) = |x-y| + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d'_n(x,y).$$

a. Vérifier rapidement que d_n, d'_n sont des pseudo-distances, et que d' est une distance sur X.
b. Montrer que d' est topologiquement équivalente à la restriction de la distance usuelle de $\mathbb{R}$.
On cherchera, pour $x \in X$ et $\epsilon > 0$ fixé, un réel $\alpha > 0$ tel que $B_d(x,\alpha) \subset B_{d'}(x,\epsilon)$.
c. Soit $(x_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy relativement à d'.
  (i) Montrer que (x_k) a une limite $x \in \mathbb{R}$ relativement à la distance usuelle.
  (ii) Montrer que x appartient à X. *On pourra considérer la suite $(|x_k - r_n|^{-1})_k$, pour n fixé.*
  (iii) Montrer que $d'(x_k, x_l)$ tend vers $d'(x_k, x)$ quand $l \to \infty$.
  (iv) Montrer que (x_k) converge vers x relativement à d'.
d. X est-il complet relativement à la distance usuelle ? à la distance d' ?

Exercice 5. On considère l'ensemble $E = [0,1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0,1]$, considérées comme fonctions de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. Pour deux éléments u, $v \in E$ on pose

$$d(u,v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u(k) - v(k)|}{2^k} \quad \text{et} \quad d_\infty(u,v) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u(k) - v(k)|.$$

a. Quel résultat du cours permettent de montrer que (E, d_∞) est complet ?
b. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments $u_n \in E$. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy pour d.
  (i) On fixe k. Montrer que la suite $(u_n(k))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
  (ii) Montrer qu'il existe un élément $v \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n(k) = v(k)$ pour tout k.
  (iii) Montrer que $(u_n)_n$ converge vers v dans (E,d).
c. On a ainsi montré que (E,d) est complet.
Cela reste-t-il vrai si on considère l'ensemble des suites à valeurs dans $]0,1[$?

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E = C^1([-1,1], \mathbb{R})$, et les normes sur E définies par

$$N(f) = \|f\|_\infty, \quad P(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

où on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

a. On pose $f_n(t) = \sqrt{n^{-1} + t^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in [-1,1]$.
   (i) Calculer $g(t) = \lim f_n(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$.
   (ii) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.
   (iii) L'espace E est-il complet relativement à N ?

On rappelle le résultat suivant : si $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 telle que $f_n(0)$ converge et $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f telle que $f' = g$.

b. Montrer que E est complet relativement à P.

Exercice 7. Pour $p \in [1, +\infty[$ on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} < \infty.$$

On admet que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite dans X. On dit que $(x_n)_n$ vérifie la propriété CG si on a $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$ pour tout n.

a. Montrer que si $(x_n)_n$ vérifie CG alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.
b. Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, on peut en extraire une suite vérifiant CG.
c. Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et admet une sous-suite convergente, alors elle converge.
d. Montrer que (X, d) est complet si et seulement si toute suite $(x_n)_n$ vérifiant CG est convergente.
e. Application. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente dans E est convergente.

Exercice 9. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie par la formule $\|P\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

a. Montrer que pour tout k, la forme linéaire $\varphi_k : P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mapsto a_k$ est continue.
b. On note S_n les sommes partielles du développement en série entière de l'exponentielle.
   Montrer que $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E qui ne converge pas dans E.
c. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynôme telle que $\deg(P_n)$ ne tend pas vers $+\infty$.
   Montrer qu'il existe un entier d et une sous-suite $(P_{n_k})_k$ telle que $\deg(P_{n_k}) \leq d$ pour tout k.
d. Soit $(P_n)_n$ une suite de Cauchy dans E qui ne converge pas.
   Montrer que $\deg(P_n)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 10. On considère les suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = e^x - 2$.

a. Montrer que f est uniformément strictement contractante sur $]-\infty, -\epsilon]$, pour tout $\epsilon > 0$.
   En déduire que f admet un unique point fixe l_- dans $\mathbb{R}_-$. Montrer que $l_- \geq -2$.
b. Montrer que si $u_0 < 0$, alors $(u_n)_n$ converge vers l_-.
   On prend $u_0 = -1$. Trouver un entier N tel que $|u_n - l_-| \leq e^{-100}$ pour tout $n \geq N$.
c. Tracer l'allure du graphe de f. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 \geq 0$.

Exercice 11. Montrer qu'il existe un unique point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = (\sin x + 8\cos y)/10 \quad \text{et} \\ y = (2\cos x + 7\sin y)/10. \end{cases}$$

On pourra montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bien choisie est uniformément strictement contractante relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pouvait-on appliquer la même méthode avec la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 12. Montrer qu'il existe un unique point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x + y) \quad \text{et} \\ y = \frac{1}{2}\cos(x - y). \end{cases}$$

On aura besoin de calculer la norme d'opérateur d'une matrice bien choisie, en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_2$.

Exercice 13. On considère l'espace E des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On fixe $g \in E$ et $\lambda \in]0, 1[$.

a. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda f(x+1) + g(x).$$

b. Exprimer $f(x)$ en fonction de g et λ, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ soit uniformément strictement contractante.

a. Montrer que si x est point fixe de f^n, alors $f(x)$ est aussi point fixe de f^n.

b. En déduire que f admet un point fixe. Montrer que ce point fixe est unique.