Espaces compacts et connexes

Exercice 1. Dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont compacts, en justifiant la réponse :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 2xy \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 3e^{xy} \leq 1\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\cos(x) + 2\sin(x) > 3\}.$$

Exercice 2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})\| = \max|m_{ij}|$.
On considère l'ensemble $O_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales $n \times n$.

a. Montrer que pour toute matrice $(m_{ij}) \in O$ et tout (i,j) on a $|m_{ij}| \leq 1$.

b. Montrer que O est compact.
Est-ce plus facile en utilisant une autre norme sur $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 3. Soit E un espace métrique. On considère une suite décroissante $(K_n)_n$ de compacts non vides de E, c'est-à-dire telle que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout n. On note $K = \bigcap_n K_n$ et on fixe un ouvert O tel que $K \subset O$. On souhaite montrer la propriété (P) suivante : il existe n tel que $K_n \subset O$.

a. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ x_n \in K_n$ et $x_n \to x \in E$. Montrer que $x \in K$.

b. Écrire la propriété (non P) en langage formalisé, sans utiliser le symbole $\not\subset$.

c. Démontrer (P) par l'absurde. *On pourra remarquer que tous les K_n sont inclus dans le compact K_0.*

d. Expliquer pourquoi on a montré en particulier que K est non vide.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé.
On note $S = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$ la sphère unité de E, et $B = \{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$ la boule unité fermée.

a. Montrer que si B est compacte, S est aussi compacte.

b. On veut montrer la réciproque : on suppose S compacte, et on fixe une suite $(v_n)_n$ quelconque à valeurs dans B.
   (i) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s-croissante telle que la suite $(\|v_{\varphi(n)}\|)_n$ converge.
   (ii) Montrer que $(v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans B.

Exercice 5. On considère l'ensemble $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0,1]$, considérées comme fonctions de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. Pour deux éléments u, $v \in X$ on pose $d_\infty(u,v) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u(k) - v(k)|$. On note δ_n l'élément de X défini comme suit :

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Calculer $d_\infty(\delta_n, \delta_m)$ pour tous n, m.

b. La suite $(\delta_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ peut-elle admettre une sous-suite de Cauchy ?

c. Montrer que X n'est pas compact.

d. Soit E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées, muni de la norme du sup.
Montrer que les boules fermées de E ne sont pas compactes.

Exercice 6. On considère l'ensemble $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0,1]$, considérées comme fonctions de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. Pour deux éléments u, $v \in X$ on pose

$$d(u,v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u(k) - v(k)|}{2^k}.$$

On considère une suite $(u_n)_n$ d'éléments de X. On rappelle qu'on peut constuire des applications s-croissantes $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout p, les sous-suites de $(u_n(0))_n$, ..., $(u_n(p))_n$ associées à $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p$ convergent.
On pose $\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ pour tout n.

a. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\psi(n))_{n\geq k}$ est une suite extraite de $(\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(n))_n$.
En déduire que les suites extraites $(u_{\psi(n)}(k))_n$ convergent pour tout k.

b. Montrer que la suite $(u_{\psi(n)})_n \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément de X au sens de d.
En déduire que (X, d) est compact.

Exercice 7. Applications du théorème d'approximation de Weierstraß.

a. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable dont tous les *moments* $m_n(f) = \int_a^b f(t)t^n \mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$, sont nuls.

(i) Montrer que $\int_a^b f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout polynôme P.

(ii) Montrer que si f est un polynôme, $f = 0$.

(iii) Montrer que si f est continue, $f = 0$.

b. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, et $Lf : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sa *transformée de Laplace* définie par

$$(Lf)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe $s_0 > 0$ tel que $(Lf)(s_0 + n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que $\int_0^1 u^{s_0+n-1} f(-\ln u)\mathrm{d}u = 0$ pour tout n.

(ii) En déduire que $f = 0$.

Exercice 8. On note $C \subset \mathbb{R}^2$ le cercle trigonométrique.

a. Rappeler pourquoi C est compact et connexe.

b. Montrer que pour tout $P \in C$, $C \setminus \{P\}$ est connexe.

c. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue $f : C \to \mathbb{R}$.
On pourra observer que $f(C)$ est nécessairement de la forme $[a, b]$.

d. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Donner un exemple d'application continue surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

e. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ surjective continue. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on pose $A = f^{-1}(\{a\})$.

(i) Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire sur la nature topologique de $f(B)$? de $f({}^cB)$?

(ii) Expliciter l'ensemble $f({}^cA)$. En déduire, par l'absurde, que A n'est pas borné.

Exercice 9. On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.
On note $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

a. Rappeler comment on montre que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

b. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, par la même méthode.

c. Montrer que le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est connexe.
On montrera que toute matrice $M \notin GL_n(\mathbb{C})$ est reliée à 0_n par un arc de matrices non inversibles.

d. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.
On montrera que toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est reliée à I_n par un arc dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10. On construit deux sous-ensembles C, $C' \subset [0, 1]$ de la manière suivante.
Si $I = [a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on définit

$$T(I) = \left[a, a + \tfrac{1}{3}(b-a)\right] \sqcup \left[a + \tfrac{2}{3}(b-a), b\right].$$

Si $A = \bigsqcup I_k$ est une réunion disjointe d'intervalles compacts, on pose $T(A) = \bigcup T(I_k)$, qui est encore une réunion disjointe d'intervalles compacts. On définit alors $C_n = T^n([0, 1])$ et $C = \bigcap_n C_n$.
Par ailleurs on considère $X = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}_*}$ et on définit $\pi : X \to [0, 1]$ en posant

$$\pi((a_k)_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

On pose alors $C' = \pi(Y)$, où $Y = \{0, 2\}^{\mathbb{N}_*} \subset X$. Remarquons que π est injective sur Y.
On note enfin $F : \mathbb{R} \to [0, 1[$ l'application « partie fractionnaire ».

a. (i) Représenter C_1, C_2, C_3.

(ii) Montrer par récurrence que $3 \cdot C_n = C_{n-1} \cup (2 + C_{n-1})$.

(iii) Montrer par récurrence que $\pi(Y) \subset C_n$ pour tout n.

(iv) Montrer par récurrence que $F(3^{n-1} \cdot C_n) \subset C_1$. En déduire que $C \subset \pi(Y)$.

On a donc $C = C'$: cet ensemble est appelé *ensemble de Cantor*.

b. Montrer que C est infini et non dénombrable.

c. Montrer que C est un compact de $\mathbb{R}$. Montrer que C est complet.
Donner une distance sur Y qui rende Y compact. Comparer avec l'exercice 6.

d. Montrer que $\mathrm{Leb}(C) = 0$, où Leb est la mesure de Lebesgue.

e. Soit $x < y$ deux éléments de C. Montrer qu'il existe $z \in]x, y[$ tel que $z \notin C$.
En déduire que C est totalement discontinu.

On peut montrer que tout espace compact totalement discontinu est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de C.

Exercice 11. Rappelons qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante C telle que $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$ pour tous x, $y \in [0,1]$. On note alors $\mathrm{Lip}(f)$ la plus petite constante C convenable, c'est-à-dire

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

On considère l'espace E des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et nulles en 0.

a. Montrer que Lip est une norme sur E.

b. Montrer que pour $f \in E$ on a $\|f\|_\infty \leq \mathrm{Lip}(f)$.

c. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, Lip).
Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

d. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E qui converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
On suppose que $\mathrm{Lip}(f_p - f_q) \leq L$ pour p fixé et q assez grand. Montrer que $\mathrm{Lip}(f_p - f) \leq L$ et que $f \in E$.

e. Montrer que (E, Lip) est un espace de Banach.