# Espaces métriques
# Devoir maison

à rendre pour le lundi 5 novembre

On considère l'espace métrique $I = [0, 1]$, muni de la distance usuelle. On note $E = C_b(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées de $I$ dans $\mathbb{R}$. On munit $E$ des normes

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in I} |f(t)| \quad \text{et} \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t.$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec $f_n \in E$ pour tout $n$, et $f \in E$. Alors :

- on dit que $(f_n)_n$ converge **simplement** vers $f$ si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ ;
- on dit que $(f_n)_n$ converge **uniformément** vers $f$ si

  $$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \;\; \forall t \in I \;\; |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon,$$

  ce qui équivaut au fait que $(f_n)_n$ converge vers $f$ au sens de la norme $N_\infty$ ;
- on dit que $(f_n)_n$ converge vers $f$ **en moyenne** si

  $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \mathrm{d}t = 0,$$

  c'est-à-dire si $(f_n)_n$ converge vers $f$ au sens de la norme $N_1$.

En pratique l'utilisation des normes $N_1$, $N_\infty$ permet de simplifier et clarifier la rédaction des raisonnements concernant la convergence uniforme et la convergence en moyenne. On rappelle à ce propos qu'une suite de vecteur $(v_n)_n$ converge vers $v$ au sens d'une norme $N$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} N(v_n - v) = 0$.

**Exercice.**

1. Montrer que pour toute $f \in E$ et tout $x \in I$ on a $|f(x)| \leq N_\infty(f)$.
   En déduire que si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$, alors $(f_n)_n$ converge simplement vers $f$.
2. Montrer qu'on a $N_1(f) \leq N_\infty(f)$ pour toute $f \in E$.
   En déduire que si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$, alors $(f_n)_n$ converge vers $f$ en moyenne.
3. Pour tout $n$ on définit une fonction $f_n \in E$ en posant $f_n(t) = t^{n-1} \sin(\pi t^n)$.
   a. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
   b. Montrer que $(f_n)_n$ converge en moyenne vers la fonction nulle.
   c. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.
   *On pourra rechercher le point $t \in I$ où $\sin(\pi t^n)$ atteint son maximum.*
   d. La suite $(f_n)_n$ peut-elle converger uniformément vers une autre fonction que la fonction nulle ?
4. On considère l'application linéaire suivante :

   $$\psi : E \to \mathbb{R}, \; f \mapsto \int_0^1 \sin(t) f(\sqrt{t}) \mathrm{d}t.$$

   a. Montrer que $\psi$ est bornée relativement à $N_\infty$.
   En déduire que si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$, alors

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin(t) f_n(\sqrt{t}) \mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(t) f(\sqrt{t}) \mathrm{d}t.$$

   b. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si on suppose seulement que $(f_n)_n$ converge vers $f$ en moyenne.