université de Caen Basse-Normandie

UFR Sciences

ANNÉE 2012-2013
Première session
10/01/2013

LICENCE de Mathématiques 3e année
Contrôle terminal ULM5CT
Espaces Métriques
3 heures

Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Chaque candidat doit noter son nom en début d'épreuve dans le coin de la copie et le cacher par collage après le pointage. Il doit, en outre, noter son numéro de place sur chacune de ses copies.

Question de cours. *(3 points)*
Soit (E, N) un espace vectoriel normé complet, et X un ensemble.
On note $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de X dans E.
Montrer que $\mathcal{F}_b(X, E)$ est complet pour la norme de la convergence uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N(f(x))$.

Il est recommandé de ne pas consacrer plus d'une heure au premier exercice.

Exercice 1.
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $N_2 : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. On note $\bar{B} = \bar{B}(0, 1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ relativement à N_2. Pour $f \in L(\mathbb{R}^2)$ on note $\|f\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur de f relativement à N_2 au départ et à l'arrivée.

1. Montrer que $\bar{B}$, munie de la distance induite par N_2, est un espace complet.
2. Montrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ on a $(3x + y)^2 + (x + 2y)^2 \leq 15(x^2 + y^2)$.
3. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{4}(3x+y, x+2y)$. On note $\alpha = \|f\|_{\text{op}}$. Montrer que $\alpha < 1$.
4. On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{4}(\cos(3x + y), x + y^2)$.
   a. Montrer que $g(\bar{B}) \subset \bar{B}$. *On pourra remarquer que pour* $(x, y) \in \bar{B}$ *on a* $|x|$, $|y| \leq 1$.
   b. Montrer qu'on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$ et $|a^2 - b^2| \leq 2|a - b|$ pour tous a, $b \in [-1, 1]$.
   c. Montrer qu'on a
   $$\forall (x, y),\ (x', y') \in \bar{B} \quad \|g(x', y') - g(x, y)\|_2 \leq \|f(|x' - x|, |y' - y|)\|_2,$$
   où f est l'application linéaire de la question 3.
5. On considère le système
   $$(\text{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 4x &=& \cos(3x + y), \\ 4y &=& x + y^2. \end{array} \right.$$
   En utilisant les questions précédentes, montrer que (S) admet une unique solution $(x, y) \in \bar{B}$.

suite au verso

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme du sup $N_\infty : f \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On considère les sous-espaces suivants de E :

$$F = \{P : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale}\},$$
$$G = \{f \in E \mid \textstyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}.$$

On fixe $f \in G$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $P_n \in F$ qui converge vers f relativement à N_∞.

On fixe une telle suite $(P_n)_n$. Pour tout n on pose $a_n = \int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t$ et $Q_n(t) = P_n(t) - a_n$.

2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
3. Montrer que $Q_n \in F \cap G$.
4. Montrer que $F \cap G$ est dense dans G.

Exercice 3. On fixe un entier $n > 0$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n. On considère les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs colonnes.
On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $N : (x_i)_i \mapsto \|(x_i)_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque.

1. On fixe un vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$.
   Montrer que l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n, A \mapsto AV$ est continue.
2. On fixe un vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $G = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|AV\| = \lambda\|V\|\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ relativement à N, et on pose $H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists V \in S \ \ \|AV\| = 1\}$.
Soit $(A_n)_n$ une suite de matrices dans H qui converge vers $B \in M_n(\mathbb{R})$.

3.
   a. Montrer que pour tout n il existe $V_n \in S$ tel que $\|A_nV_n\| = 1$.
   b. Montrer que la suite de vecteurs $(V_n)_n$ admet une sous-suite $(V_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un vecteur $W \in S$.
   c. Montrer que $\|BW\| = 1$.
4. Montrer que H est fermé.

Exercice 4. Soit n un entier fixé. On note X l'ensemble des applications $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$.
Pour $f,\ g \in X$ on pose

$$D(f,g) = \{i \in \{1,\ldots,n\} \mid f(i) \neq g(i)\} \quad \text{et} \quad d_H(f,g) = \operatorname{card} D(f,g).$$

Ainsi, $d_H(f,g)$ est le nombre d'entiers $i \in \{1,\ldots,n\}$ pour lesquels $f(i) \neq g(i)$.

1. Montrer que $D(f,h) \subset D(f,g) \cup D(g,h)$ pour tous $f,\ g,\ h \in X$.
2. Montrer que d_H est une distance sur X.