Université de Caen
UFR Sciences
L3 Maths

EM51
2012-2013
1er semestre

Espaces métriques
Examen partiel – Devoir à la maison

À rendre pour le lundi 26 novembre 13h30 – Facultatif

Choisir l'un des deux exercices seulement, en suivant la règle suivante : on peut choisir l'exercice 1 si on a eu 4 points ou moins à cet exercice ; on peut choisir l'exercice 2 si on a eu 5 points ou moins à cet exercice. La qualité des raisonnements et de la rédaction sera primordiale.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$.
On considère sur E la norme $N_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et une norme quelconque $N : E \to \mathbb{R}$.
Pour $f \in L(E)$ on note $P(f) = \|f\|_{N_1 \to N}$ la norme d'opérateur de f relativement à N_1 et N, et on pose

$$N'(f) = \textstyle\sum_{i=1}^n N(f(e_i)).$$

1. Montrer que N' est une norme sur $L(E)$.
2. a. Montrer que pour tout vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in E$ on a $N(f(x_1, \dots, x_n)) \le N'(f) \sum_{i=1}^n |x_i|$.
   b. Montrer que pour tout $f \in L(E)$ on a $P(f) \le N'(f) \le nP(f)$.
3. Dans cette question on montre que les inégalités de la question 2b sont optimales.
   a. Soit $v \in E$ tel que $N(v) = 1$. On considère l'endomorphisme $f : E \to E$ donné par $f(e_i) = v$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Déterminer $N'(f)$ et $P(f)$.
   b. On considère l'endomorphisme $p : E \to E$ donné par $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0)$. Déterminer $N'(p)$ et $P(p)$ en fonction de $N(e_1)$.
4. Dans cette question on étudie un cas particulier. On prend $n = 3$ et $N = N_2$ donnée par
   $$N_2(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
   On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par la formule $f(x, y, z) = (3y, 3x + z, x + 3z)$.
   Montrer que $P(f) = \sqrt{10}$ et déterminer $N'(f)$.

Correction.

1. Si $N'(f) = 0$, la somme de termes positifs $\sum_{i=1}^n N(f(e_i))$ est nulle, donc $N(f(e_i)) = 0$ pour tout i. Comme N est une norme, cela implique $f(e_i) = 0$ pour tout i. Comme f est linéaire et $(e_i)_i$ est génératrice, on a donc $f = 0$. Inversement si $f = 0$ on a clairement $N'(f) = 0$. On a de plus
   $$N'(\lambda f) = \sum_{i=1}^n N(\lambda f(e_i)) = \sum_{i=1}^n |\lambda| N(f(e_i)) = |\lambda| \sum_{i=1}^n N(f(e_i)) = |\lambda| N'(f) \quad \text{et}$$
   $$N'(f + g) = \sum_{i=1}^n N(f(e_i) + g(e_i)) \le \sum_{i=1}^n (N(f(e_i)) + N(g(e_i))) = N'(f) + N'(g)$$
   en utilisant le fait que les deux axiomes correspondant sont vérifiés par N. On a donc montré que N' est une norme.

2. a. On a $(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$N(f(x_1,\dots,x_n))=N\Big(\sum_{i=1}^n x_if(e_i)\Big)\le\sum_{i=1}^n |x_i|N(f(e_i)).$$

Par ailleurs $N'(f)\sum_{i=1}^n|x_i|=\sum_{i,j=1}^n|x_i|N(f(e_j))$, ce qui est plus grand que l'expression précédente car on rajoute les termes positifs $|x_i|N(f(e_j))$ avec $i\neq j$.

b. L'inégalité de la question précédente s'écrit aussi $N(f(v))\le N'(f)N_1(v)$ pour tout v. Cela montre bien que $P(v)\le N'(f)$, car P est la norme d'opérateur associée à N_1 et N.

Pour la même raison, on a $N(f(v))\le P(f)N_1(v)$ pour tout v, et en particulier $N(f(e_i))\le P(f)N_1(e_i)=P(f)$ pour tout i. En sommant sur i on obtient $N'(f)\le nP(f)$.

3. a. On a $N'(f)=\sum_{i=1}^n N(f(e_i))=\sum_{i=1}^n N(v)=n$, par définition de f. D'autre part on a $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_if(e_i)=(\sum_{i=1}^n x_i)v$, donc

$$N(f(x_1,\dots,x_n))=\Big|\sum_{i=1}^n x_i\Big|N(v)=\Big|\sum_{i=1}^n x_i\Big|\le N_1(x_1,\dots,x_n)$$

par l'inégalité triangulaire. Cela montre que $P(f)\le 1$. Par ailleurs on a $N(f(e_1))=N(v)=1$ et $N_1(e_1)=1$ donc $P(f)\ge 1$, et finalement $P(f)=1$.

b. On a $N'(p)=N(p(e_1))+\dots+N(p(e_n))=N(e_1)+0+\dots 0=N(e_1)$. D'autre part

$$N(p(x_1,\dots,x_n))=N(x_1,0,\dots,0)=|x_1|N(e_1)\le\Big(\sum_{i=1}^n|x_i|\Big)N(e_1)=N_1(x_1,\dots,x_n)N(e_1).$$

Cela montre que $P(p)\le N(e_1)$. Par ailleurs $N(p(e_1))=N(e_1)$ et $N_1(e_1)=1$ donc $P(p)\ge N(e_1)$, et finalement $P(p)=N(e_1)$.

4. On a, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(3y)^2+(3x+z)^2+(x+3z)^2&=10x^2+9y^2+10z^2+12xz\\&\le 10x^2+10y^2+10z^2+20|xz|+20|xy|+20|yz|\\&\le 10(|x|+|y|+|z|)^2\end{aligned}$$

donc, en prenant la racine carrée, $N_2(f(x,y,z))\le\sqrt{10}N_1(x,y,z)$. Cela montre que $P(f)\le\sqrt{10}$. Par ailleurs $N_2(f(1,0,0))=\sqrt{10}$ et $N_1(1,0,0)=1$ donc en fait $P(f)=\sqrt{10}$. Enfin on calcule $N'(f)=N_2(f(1,0,0))+N_2(f(0,1,0))+N_2(f(0,0,1))=3+2\sqrt{10}$.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues définies sur $[0,\pi]$. Pour $f \in E$ on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)| \quad \text{et} \quad P(f) = \int_0^\pi |\sin(t)f(t)|\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que P est une norme sur E.
2. Les normes N_∞ et P sont-elles équivalentes ?
   On pourra considérer les fonctions $f_n : t \mapsto t^n/\pi^n$.

On considère les applications linéaires S et $D : E \to E$ définies par

$$S(f) = (t \mapsto f(\pi - t)) \quad \text{et} \quad D(f) = (t \mapsto f(t/2)).$$

3. Montrer que S est un opérateur borné relativement à N_∞ (au départ et à l'arrivée).
   Déterminer la norme d'opérateur $\|S\|$ correspondante.
4. Montrer que S et D sont des opérateurs bornés relativement à P (au départ et à l'arrivée).
   Montrer que la norme d'opérateur $\|D\|$ relative à P est comprise entre 1 et 4.

On considère la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^\pi \cos(t)f(t)\mathrm{d}t$.

5. Montrer que φ est une forme linéaire bornée relativement à N_∞.
6. La forme linéaire φ est-elle bornée relativement à P ?
   On pourra considérer les fonctions $g_n : t \mapsto (\cos t)^n$. On admettra que $W_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\mathrm{d}t$ tend vers $\sqrt{\pi/2}$ quand n tend vers $+\infty$ (intégrales de Wallis).

Correction

1. On a clairement $P(0) = 0$. Soit $f \in E$ une fonction telle que $P(f) = 0$. Comme $(t \mapsto |\sin(t)f(t)|)$ est positive et continue, le fait que l'intégrale $P(f)$ s'annule entraîne que $\sin(t)f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$. Comme $\sin(t) \neq 0$ pout $t \in]0,\pi[$, on en déduit que $f(t) = 0$ pour $t \in]0,\pi[$. Mais f est continue, on doit donc avoir $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$, c'est-à-dire $f = 0$ dans E.
   On a par ailleurs :
   $$P(\lambda f) = \int_0^\pi |\sin(t)\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^\pi |\sin(t)f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda|P(f) \quad \text{et}$$
   $$P(f+g) = \int_0^\pi |\sin(t)(f(t)+g(t))|\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi (|\sin(t)f(t)| + |\sin(t)g(t)|)\mathrm{d}t = P(f) + P(g),$$
   d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et la positivité de l'intégrale.
2. Comme f_n est positive et croissante sur $[0,\pi]$, on a $N_\infty(f_n) = f_n(\pi) = 1$. Par ailleurs, comme $|\sin(t)| \leq 1$ on a
   $$P(f_n) \leq \int_0^\pi |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{t^n}{\pi^n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n+1}.$$
   Si P et N_∞ étaient équivalentes, il existerait une constante K telle que $N_\infty(f_n) \leq KP(f_n)$ pour tout n. Cela donne $1 \leq K\pi/(n+1)$ ce qui est absurde car le membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$.
3. Si $t \in [0,\pi]$, alors $\pi - t \in [0,\pi]$, donc $|f(\pi - t)| \leq N_\infty(f)$. En prenant le sup on obtient $N_\infty(S(f)) = \sup_{[0,\pi]} |f(\pi - t)| \leq N_\infty(f)$, ce qui montre que S est borné et $||S|| \leq 1$. Par ailleurs si 1 est la fonction constante égale à 1 on a $S(1) = 1$, ce qui implique que $||S|| \geq 1$. Finalement on a donc $||S|| = 1$.

4. En posant $s = \pi - t$ on obtient

$$P(S(f)) = \int_0^\pi |\sin(t)f(\pi - t)|\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(\pi - s)f(s)|\mathrm{d}s = P(f),$$

car $\sin(\pi - s) = \sin(s)$. Cela montre directement que $||S|| = 1$ relativement à P. Pour D on utilise le changement de variable $t = 2s$:

$$\begin{aligned} P(D(f)) &= \int_0^\pi |\sin(t)f(t/2)|\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} |\sin(2s)f(s)|\mathrm{d}s \\ &= 4\int_0^{\pi/2} |\cos(s)\sin(s)f(s)|\mathrm{d}s \leq 4\int_0^{\pi/2} |\sin(s)f(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq 4\int_0^\pi |\sin(s)f(s)|\mathrm{d}s = 4P(f). \end{aligned}$$

Cela montre que D est borné et $||D|| \leq 4$. Par ailleurs si 1 est la fonction constante égale à 1 on a $D(1) = 1$, ce qui implique que $||D|| \geq 1$.

5. On a, pour tout $f \in E$:

$$|\varphi(f)| = \Big|\int_0^\pi \cos(t)f(t)\mathrm{d}t\Big| \leq \int_0^\pi |\cos(t)f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi N_\infty(f)\mathrm{d}t = \pi N_\infty(f).$$

Cela montre que la forme linéaire φ est bornée relativement à N_∞ (et $||\varphi|| \leq \pi$).

6. On commence par calculer $P(g_n)$. On a, en posant $s = \pi - t$:

$$\int_{\pi/2}^\pi |\sin(t)(\cos t)^n|\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} |\sin(\pi - s)(\cos(\pi - s))^n|\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} |\sin(s)(\cos s)^n|\mathrm{d}s,$$

car $\sin(\pi - s) = \sin(s)$ et $\cos(\pi - s) = -\cos(s)$. Comme sinus et cosinus sont positifs sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit :

$$P(g_n) = \int_0^{\pi/2} |\sin(t)(\cos t)^n|\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^\pi |\sin(t)(\cos t)^n|\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \sin(t)(\cos t)^n\mathrm{d}t.$$

On pose alors $s = \cos t$, $\mathrm{d}s = -\sin(t)\mathrm{d}t$ et on obtient :

$$P(g_n) = 2\int_0^1 s^n\mathrm{d}s = \frac{2}{n+1}.$$

D'autre part pour n impair on calcule $\varphi(g_n)$ à l'aide des intégrales de Wallis. En effectuant le même découpage de l'intervalle $[0, \pi]$ que précédemment on a en effet :

$$\varphi(g_{2k+1}) = \int_0^\pi (\cos t)^{2k+2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2k+2}\mathrm{d}t = \frac{2W_{2k+2}}{\sqrt{2k+2}}.$$

Si φ était bornée relativement à P il existerait une constante K telle que $\varphi(g_{2k+1}) \leq KP(g_{2k+1})$ pour tout k. Cela s'écrit

$$\frac{2W_{2k+2}}{\sqrt{2k+2}} \leq \frac{2K}{2k+2} \quad\Longleftrightarrow\quad W_{2k+2} \leq \frac{K}{\sqrt{2k+2}},$$

ce qui contredit le fait que W_{2k+2} tend vers $\sqrt{\pi/2}$.