Normes et distances

Exercice 1. Soit $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction nulle en 0 et croissante.
On dit que θ est ***sous-additive*** si $\theta(u+v) \leq \theta(u) + \theta(v)$ pour tous u, $v \in \mathbb{R}_+$.

a. (i) Montrer que si θ est dérivable et θ' est décroissante, alors θ est sous-additive.
   (ii) Montrer que si θ est sous-additive et $\theta(u) = 0$ pour un certain $u > 0$, alors $\theta(v) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+$.
   (iii) Vérifier que $\theta_1 : u \mapsto \min(u, 1)$ et $\theta_2 : u \mapsto u/(1+u)$ sont sous-additives.

b. On suppose que θ est sous-additive et non identiquement nulle.
   Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que $d' = \theta \circ d$ est une distance sur E.

c. On prend $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle d. On note d'_1 et d'_2 les distances sur $\mathbb{R}$ associée à θ'_1 et θ'_2.
   (i) Soit p, q deux entiers relatifs distincts. Que vaut $d'_1(p, q)$?
   (ii) Les distances d'_1 et d'_2 sont-elles équivalentes à d ?

Exercice 2. On considère $X = \mathbb{R}^2$ et on pose, pour (x, y), $(x', y') \in X$:

$$d((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |y'-y| & \text{si } x = x', \\ |x'-x| + |y| + |y'| & \text{si } x \neq x'. \end{cases}$$

a. Montrer que d est une distance.

b. Montrer que $d((x,y),(0,0)) = N_1(x,y)$.
   La distance d est-elle équivalente à la distance associée à N_1 ? Est-elle associée à une norme ?

c. Représenter la boule ouverte $B((x,y),r)$. On distinguera les cas $r \geq |y|$, $0 < r < |y|$.

Exercice 3. Soit $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la distance usuelle $d(a,b) = |b-a|$ et on note $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ la « distance » associée entre deux parties de $\mathbb{N}^*$.

a. Montrer que $d(n, A) = k \Rightarrow \exists a \in A \ d(n,a) = k$. Est-vrai dans tout espace métrique ?
   Donner des exemples de parties A, B, $C \in X$ telles que $d(A,B) = 0$, $A \neq B$, et $d(A,C) > d(A,B) + d(B,C)$.

Pour $A \in X$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on note $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* \mid d(n,A) \leq k\}$.
Pour A, $B \in X$ on pose $\delta(A,B) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A \subset B_k \text{ et } B \subset A_k\}$.

b. Montrer que $A \subset B \Rightarrow A_k \subset B_k$ pour tout k, et que $(A_k)_l = A_{k+l}$.

c. Montrer que δ est une distance sur X.
   Donner des exemples de parties A, B, $C \subset \mathbb{N}^*$ pour lesquelles l'inégalité triangulaire est une égalité.

Exercice 4. Soit $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$.

a. Rappelons qu'on note $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la différence symétrique de A, $B \in X$.
   Montrer que $A = B$ **ssi** $A \bigtriangleup B = \emptyset$.

b. Pour tous A, $B \in X$ on pose $\delta(A,B) = (\min(A \bigtriangleup B))^{-1}$, en convenant que $\delta(A,A) = 0$.
   Montrer que $\delta(A,B) < 1/n \iff A \cap [1,n] = B \cap [1,n]$.

c. Montrer que δ est une distance sur X. Est-elle équivalente à celle de l'exercice précédent ?

Exercice 5. On fixe des réels a, b et on pose $N(x,y) = a|x| + b|y|$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a. À quelle condition sur a, b l'application N est-elle une semi-norme sur $\mathbb{R}^2$? une norme ?

b. Lorsque N est une norme, montrer qu'elle est équivalente à la norme euclidienne canonique.

Exercice 6. On note N_2 la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$. Soit $q : (x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ est une forme quadratique définie-positive sur $\mathbb{R}^2$, on note N_q la norme associée.

a. Montrer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. Rappeler à quelles conditions sur a, b, c la forme quadratique q est définie-positive.

c. Expliquer pourquoi on peut trouver $a' \in]0, a[$, $c' \in]0, c[$ tels que $b^2 \leq 4a'c'$.

d. Montrer que N_2 et N_q sont équivalentes.

Exercice 7. On pose $N(x,y) = \max(|x|, |x+y|)$ et $P(x,y) = \sup_{0 \le t \le 1} |x+ty|$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note N_2 la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que N, P sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que $N(x,y) \ge \frac{1}{2}|y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c. Montrer que N et P sont équivalentes à N_2.

Exercice 8. On considère $E = \mathbb{Q}^2$ et on pose $N(x,y) = |x + y\sqrt{2}|$ pour tout $(x,y) \in E$.

a. Montrer que N est une norme sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E.

b. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier relatif a_n tel que $N(a_n, 10^n) < 1$.

c. La norme N est-elle équivalente à la norme N_1 ?

Exercice 9. Calculer la norme des applications linéaires suivantes :

- $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(x,y) \mapsto 2x + 3y$,
- $g : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(x,y,z) \mapsto \pi x + y - \pi z$,
- $h : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $(x,y,z) \mapsto (x+y, 2y+z)$,
- $i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

Exercice 10. On note E l'ensemble des suites réelles bornées sur $\mathbb{R}$. Soit $(\sum a_n)$ une série convergente à termes positifs. Pour $x = (x_n)_n \in E$ on note $N(x) = \sum a_n |x_n|$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et que N est une semi-norme sur E.

b. À quelle condition N est-elle une norme sur E ?
On pourra noter e_p la suite $(\delta_{p,n})_n$ et calculer $N(e_p)$ pour tout p.

c. On suppose que N est une norme. Est-elle équivalente à la norme $N_\infty : x \mapsto \sup_n |x_n|$?
Obtient-on une norme équivalente à N si on remplace $(a_n)_n$ par $(a_n/n)_n$? par $(\operatorname{sh} a_n)_n$?

Exercice 11. Soit E l'espace des suites complexes presque nulles sur $\mathbb{N}$, muni de la norme N_2.
On fixe une suite bornée $(a_n)_n$ et on considère les endomorphismes D, M, S définis comme suit :

$$D((x_n)_n) = (x_{n+1})_n, \quad M((x_n)_n) = (a_n x_n)_n, \quad \text{et} \quad S((x_n)_n) = (y_n)_n \quad \text{où} \quad y_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Montrer que D, M, S sont bornés et calculer les normes d'opérateur de D et M.

Exercice 12. On considère l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose, pour $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$:

$$N(P) = \sup_i |a_i| \quad \text{et} \quad N'(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

On définit par ailleurs des endomorphismes de E en posant

$$f(P) = P', \quad g(P) = (X+1)P \quad \text{et} \quad h_\alpha(P) = P(\alpha), \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que N et N' sont des normes sur E.

b. Les applications f, g, h_1, h_2 sont-elles bornées relativement à N ? à N' ?
Le cas échéant, calculer leurs normes d'opérateurs.

c. Les normes N, N' sont-elles équivalentes ?

Exercice 13. On considère l'espace $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies comme suit :

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad P_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad P_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

a. Montrer que P_1 et P_2 sont des normes.
Rappeler comment on démontre que $f' = 0 \implies f$ constante.

b. Montrer que les normes P_1 et P_2 sont équivalentes. Sont-elles équivalentes à N_∞ ?

c. Pour lesquelles des ces normes la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f'(0)$ est-elle bornée ?
Lorsque φ est bornée, montrer que $\|\varphi\| = 1$ dans E'. Cette norme est-elle atteinte ?

Exercice 14. On considère l'espace vectoriel $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et le sous-espace $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
Pour tout élément $f \in E$ on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

a. Montrer que N est une norme sur E, et que N' est une semi-norme. N' est-elle une norme ?
b. Résoudre l'équation différentielle $f + f' = 0$.
   En déduire que la restriction de N' à F est une norme.
c. On fixe $g \in C([0,1], \mathbb{R})$. Résoudre l'équation différentielle $f + f' = g$. *On pourra utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire rechercher f sous la forme $f(t) = \lambda(t)e^{-t}$.* Y a-t-il une solution dans F ?
d. En utilisant la question précédente, montrer que les normes N et N' sont équivalentes sur F.

Exercice 15. Calculer la norme des formes linéaires

$$\varphi : f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t, \qquad \psi : f \mapsto \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t,$$

définies sur l'espace $C([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.
Ces normes sont-elles atteintes ?

Exercice 16. On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On dit que $f \in E$ est positive, et on note $f \geq 0$, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est positive si $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

a. Montrer qu'une forme linéaire positive est bornée. *On pourra considérer $g : x \mapsto \|f\| - f(x)$.*
b. Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : f \mapsto f(1)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$.
   Montrer directement que ces formes linéaires sont bornées.

Exercice 17. *(partiel 2011-2012)*
On considère l'espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
Pour $f \in E$ on pose $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)|$.
On définit par ailleurs des formes linéaires φ, $\psi \in E^*$ en posant

$$\varphi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)dt \quad \text{et} \quad \psi(f) = f(0).$$

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
b. Montrer que la forme linéaire φ est bornée.
c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère $f_n \in E$ donnée par $f_n(t) = (t + \frac{1}{n})^{-1}$.
   (i) Montrer que $\|f_n\| \leq 1$ et calculer $\psi(f_n)$ pour tout n.
   (ii) La forme linéaire ψ est-elle bornée ?
d. Montrer que $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$.

Exercice 18. Si N, N' sont deux normes sur $E = \mathbb{R}^n$, on note $\|M\|_{N\to N'}$ la norme d'opérateur d'une matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ vue comme application linéaire de $(\mathbb{R}^n, N)$ vers $(\mathbb{R}^n, N')$.

a. Montrer que $\|M\|_{N_1\to N_1} = \max_j \sum_i |m_{ij}|$.
b. Montrer que $\|M\|_{N_\infty\to N_\infty} = \max_i \sum_j |m_{ij}|$.
c. Montrer que $\|M\|_{N_\infty\to N_1} \leq \sum_{ij} |m_{ij}|$.
   Donner un exemple de matrice M telle que cette inégalité soit une égalité, et un exemple tel qu'elle soit stricte.

Exercice 19. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme N_2, et on note $\|\cdot\|_{\text{op}} = \|\cdot\|_{N_2\to N_2}$ la norme d'opérateur associée sur $M_n(\mathbb{R})$.
On pose par ailleurs, pour A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ et $\|A\|_2^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$.

a. Vérifier que $(A, B) \mapsto (A|B)$ est une forme bilinéaire $M_n(\mathbb{R})$.
b. Calculer $(A|A)$ en fonction des coefficients de $A = (a_{ij})$.
   En déduire que la forme bilinéaire considérée est définie-positive.
c. Montrer les inégalités $\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_{\text{op}}$. *On pourra calculer la trace en utilisant une BON de $\mathbb{R}^n$.*
d. Quel argument permet de montrer sans calcul que ${}^tAA$ est diagonalisable en BON ?
   Montrer que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont positives.
e. En utilisant la question précédente, montrer que $\|A\|_2^2$ est égal à la somme des valeurs propres de ${}^tAA$.
f. De même, montrer que $\|A\|_{\text{op}}^2$ est égal à la plus grande valeur propre de ${}^tAA$.
g. Retrouver les inégalités de la question c.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel normé non nul et u, $v \in L'(E)$. On suppose que $u \circ v - v \circ u = \lambda \mathrm{Id}$.

a. Montrer que $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = \lambda(n+1)v^n$ pour tout n.

b. Montrer qu'on a forcément $\lambda = 0$.

c. On prend $E = C^\infty([0,1])$, muni de la norme de la convergence uniforme $N = \|\cdot\|_\infty$.
On pose $u(f) = f'$ et $v(f) = (t \mapsto tf(t))$. Calculer $u \circ v - v \circ u$. Conclusion ?

d. On conserve l'espace E et les endomorphismes u, v de la question précédente.
On considère la norme $N' : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ sur E.
Montrer que u et v sont bornés pour la norme $\|\cdot\|_{N' \to N}$. Conclusion ?

Exercice 21. *(partiel 2011-2012)*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, et M sa matrice dans les bases canoniques. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme N_2, $\mathbb{R}^3$ de la norme N_1, et on note $\|f\|$ la norme d'opérateur associée pour f. Par ailleurs on pose

$$P(M) = |a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que P est une norme sur $M_{3,2}(\mathbb{R})$.

b. Exprimer $f(x, y)$ en fonction de a, b, c, d, e, f, x, y. En déduire que $\|f\| \leq P(M)$.

c. On prend $f(x, y) = (x + y, 2x - y, x - y)$.
   (i) À l'aide de la question 2, donner un majorant pour $\|f\|$.
   (ii) En calculant $f(4, -1)$ donner un minorant pour $\|f\|$.

d. *Cette question est moins facile.*
On conserve la fonction f de la question 3.
   (i) Démontrer l'inégalité $|X| + |Y| + \frac{1}{2}|X + 3Y| \leq \sqrt{\frac{17}{2}}\sqrt{X^2 + Y^2}$, pour tous X, $Y \in \mathbb{R}$.
   (ii) En posant $X = x + y$, $Y = x - y$, montrer que $\|f\| = \sqrt{17}$.