Espaces compacts et connexes

Exercice 1. Dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont compacts, en justifiant la réponse :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 2xy \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 3e^{xy} \leq 1\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\cos(x) + 2\sin(x) > 3\}.$$

Exercice 2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})\| = \max |m_{ij}|$.
On considère l'ensemble $O_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales $n \times n$.

a. Montrer que pour toute matrice $(m_{ij}) \in O$ et tout (i,j) on a $|m_{ij}| \leq 1$.

b. Montrer que O est compact.
Est-ce plus facile en utilisant une autre norme sur $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 3. Soit E un espace métrique, $F \subset E$ un fermé et $K \subset E$ un compact.

a. Montrer qu'il existe a, $b \in K$ tels que $d(a,b) = \operatorname{diam} K$.

b. On suppose F compact. Montrer qu'il existe $a \in K$, $b \in F$ tels que $d(a,b) = d(K,F)$.

c. On ne suppose plus F compact, mais on suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie.
   (i) Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $d(a,F) = d(K,F)$.
   (ii) Soit $r > d(K,F)$. Montrer que $\bar{B}(a,r) \cap F$ est compact.
   (iii) Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $d(a,b) = d(K,F)$.

d. Donner un exemple de deux fermés F, G dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ tels que $F \cap G = \emptyset$ et $d(F,G) = 0$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé.
On note $S = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$ la sphère unité de E, et $B = \{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$ la boule unité fermée.

a. Montrer que si B est compacte, S est aussi compacte.

b. On veut montrer la réciproque : on suppose S compacte, et on fixe une suite $(v_n)_n$ quelconque à valeurs dans B.
   (i) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s-croissante telle que la suite $(\|v_{\varphi(n)}\|)_n$ converge.
   (ii) Montrer que $(v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans B.

Exercice 5. On considère l'ensemble $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0,1]$, considérées comme fonctions de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. Pour deux éléments u, $v \in X$ on pose $d_\infty(u,v) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u(k) - v(k)|$. On note δ_n l'élément de X défini comme suit :

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Calculer $d_\infty(\delta_n, \delta_m)$ pour tous n, m.

b. La suite $(\delta_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ peut-elle admettre une sous-suite de Cauchy ?

c. Montrer que X n'est pas compact.

d. Soit E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées, muni de la norme du sup.
Montrer que les boules fermées de E ne sont pas compactes.

Exercice 6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable dont tous les *moments* $m_n(f) = \int_a^b f(t)t^n \mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$, sont nuls.

a. Montrer que $\int_a^b f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout polynôme P.

b. Montrer que si f est un polynôme, $f = 0$.

c. Montrer que si f est continue, $f = 0$.

Exercice 7. On note E l'espace des fonction continues $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$. On considère les sous-espaces suivants de E :

$$\begin{aligned} F &= \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ paire}\}, \\ G &= \{P : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale}\}, \\ H &= \{P : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale et paire}\}. \end{aligned}$$

a. Rappeler quel théorème permet de montrer que G est dense dans E.

b. Montrer que F est fermé dans E.

c. Soit f un élément de F, et $(P_n)_n$ une suite d'éléments de G qui converge vers f.

   (i) On pose $Q_n(t) = \frac{1}{2}(P_n(t) + P_n(-t))$. Montrer que $(Q_n)_n$ converge vers f dans E.

   (ii) Montrer que H est dense dans F.

d. On recherche les fonctions $f \in E$ vérifiant la propriété

$$\text{(I)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-1}^{1} f(t)t^{2n}\mathrm{d}t = 0.$$

   (i) Montrer que si f est paire et vérifie (I) alors $f = 0$.

   (ii) Montrer que les fonctions vérifiant (I) sont les fonctions impaires.

Exercice 8. On note $C \subset \mathbb{R}^2$ le cercle trigonométrique.

a. Rappeler pourquoi C est compact et connexe.

b. Montrer que pour tout $P \in C$, $C \setminus \{P\}$ est connexe.

c. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue $f : C \to \mathbb{R}$.
On pourra observer que $f(C)$ est nécessairement de la forme $[a, b]$.

d. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Donner un exemple d'application continue surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

e. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ surjective continue. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on pose $A = f^{-1}(\{a\})$.

   (i) Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire sur la nature topologique de $f(B)$? de $f({}^cB)$?

   (ii) Expliciter l'ensemble $f({}^cA)$. En déduire, par l'absurde, que A n'est pas borné.

Exercice 9. On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.
On note $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

a. Rappeler comment on montre que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

b. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, par la même méthode.

c. Montrer que le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est connexe.
On montrera que toute matrice $M \notin GL_n(\mathbb{C})$ est reliée à 0_n par un arc de matrices non inversibles.

d. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.
On montrera que toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est reliée à I_n par un arc dans $GL_n(\mathbb{C})$.