ALGÈBRE 1

[*Sous-espaces vectoriels*]

Exercice 1. Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et dire si ce sont des sous-espaces vectoriels :
- $E = \{(2,1)\}$
- $F = \{(1,2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- $G = \{(2t,-t) \mid r \in \mathbb{R}\}$
- $H = \{(t,t) \mid t > 0\}$
- $I = \{(t^2,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- $J = \{(s,s+t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
- $E = \{(2t,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- $F = \{(0,2t,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$,
- $G = \{(t+s,2t-3s,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$,
- $H = \{(2t^2,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- $I = \{(t,st,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$,
- $J = \{(s+t^2,-s,t^2) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3z=0,\ 2y-z=0,\ x-2y+3z=0\}$,
- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y=x,\ x^2+z=0\}$.
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2=y^2,\ x+y+z=0,\ z=0\}$.

Exercice 4. À l'aide de la méthode du pivôt de Gauss, mettre les sous-espaces vectoriels suivants sous forme paramétrée : $E=\{0\},\ I=\mathbb{R}(0,1,1),\ J=\mathbb{R}(-1,0,1)\oplus\mathbb{R}(2,1,0),\ K=\mathbb{R}(2,-3,0,1)\oplus\mathbb{R}(1,0,1,0),\ L=\mathbb{R}(13,3,-4,2),\ M=\mathbb{R}(-1,1,0,1)\oplus\mathbb{R}(2,-1,1,0)$
- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0 \text{ et } x+y-2z=0 \text{ et } 5x-4y-z=0\}$,
- $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0 \text{ et } -4x-y+z=0\}$,
- $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-4y+2z=0 \text{ et } 3x-6y+3z=0\}$,
- $K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-2z-t=0 \text{ et } x+y-z+t=0 \text{ et } -4x-y+4z+5t=0\}$,
- $L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+3z-2t=0 \text{ et } x+3y+4z-3t=0 \text{ et } 2x+4y+8z-3t=0\}$,
- $M = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-3z+2t=0 \text{ et } 2x+y-3z+t=0 \text{ et } y+z-t=0\}$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les sous-ensembles :
- $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$,
- $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+3y=2\}$,
- $L_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y=0\}$.

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6. Déterminer ceux des sous-ensembles suivants qui sont des sous-espaces vectoriels de E :
- $E_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in E = \mathbb{R}^5 \mid x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=0\}$,
- $E_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in E = \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2=x_3^2\}$,
- $E_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in E = \mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2+x_3+x_4=1\}$.

Exercice 7. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 = E \mid x+y-z=0\}$ et $G = \{(a-b,a+b,a-3b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

a. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les sous-ensembles :
- $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$,
- $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,
- $L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$,
- $L_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$,
- $L_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$,
- $L_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$.

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?
- F_1 : ensemble des applications impaires,
- F_2 : ensemble des applications qui s'annulent en 0,
- F_3 : ensemble des applications qui s'annulent en un point,
- F_4 : ensemble des applications telles que $f(1) = 0$,
- F_5 : ensemble des applications positives,
- F_6 : ensemble des applications telles que $f(0) = 1$,
- F_7 : ensemble des applications continues.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels. Déterminer celles des parties suivantes qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$:
- $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P = n\}$ (n étant un entier naturel fixé),
- $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ (n étant un entier naturel fixé),
- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

Exercice 12. On considère $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.
Montrer que E et F sont des espaces vectoriels mais que le sous-ensemble $E \cup F$, que l'on déterminera, n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 13. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \{(r + 2t, r + s + t, r + 2s, t - s) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}, \\ G &= \{(x, y, z, t) \mid x + y - 2z - t = 0\}. \end{aligned}$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 14. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\}, \\ G &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \text{ et } b = 2c\}. \end{aligned}$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 15. (Partiel n° 1, 2012)

a. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-ensemble de E.
Quand peut-on dire que F est un sous-espace vectoriel de E ?

b. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel (avec démonstration) :
- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x$ et y sont des réels tels que $y \leq 0\}$,
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 2\}$,
- $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$,
- $E_4 = \{(2a - b, a + 3b) \mid a, b$ réels$\}$,
- $E_5 = \{f$ fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = f(-1) = 0\}$.

c. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On considère l'ensemble H défini par $H = F \cap G = \{u \in E \mid u \in F$ et $u \in G\}$.
Montrer que H est non vide.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 16. (Partiel n° 1, 2011) On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.
On pose $V = \{(t^2, -t^2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. V est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 17. (Partiel n° 1, 2010)

a. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-ensemble de E.
Quand peut-on dire que F est un sous-espace vectoriel de E ?

b. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel (avec démonstration) :
   (i) $E_1 = \{(x, y) \mid x$ et y sont des réels tels que $x \leq 0\}$,
   (ii) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 6y - z = 2\}$,
   (iii) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3 - 4z = 0\}$,
   (iv) $E_4 = \{(a - 2b, 3a + b) \mid a, b$ réels $\}$,
   (v) $E_5 = \{f$ fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$.

Exercice 18. (Partiel n° 2, 2012) Soient E un espace vectoriel et U et V deux sous-espaces vectoriels de E. On pose $H = U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$.

a. Montrer que $U \cup V \subset U + V$.

b. Montrer que $U + V$ est un sous-espace vectoriel de E.

c. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $U \cup V \subset F$.
Montrer que $U + V \subset F$.

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel, U et V des sous-espaces vectoriels de E

a. Soit $W = \{(x, y) \in E \times E \mid x \in U, y \in V\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $E \times E$.

b. Soit $S = \{x + y \mid x \in U, y \in V\}$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $E \times E$.
On fera cette démonstration par une vérification directe ou en utilisant une application linéaire.

c. Soit $D = \{(x, x) \in E \times E \mid x \in E\}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $E \times E$.
On fera cette démonstration par une vérification directe ou en utilisant une application linéaire.

Exercice 20. On considère le système formé des 3 équations suivantes, à résoudre dans $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 1. \end{cases}$$

a. Déterminer l'ensemble S des solutions de ce système.

b. (i) Cet ensemble S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$?
   (ii) Montrer que le vecteur $v_0 = (0, 0, 0, 0, 1)$ est une solution du système.
   (iii) Montrer que l'on peut écrire $S = v_0 + E = \{v_0 + v \mid v \in E\}$, où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
   (iv) Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs de E.

[*Applications linéaires*]

Exercice 21. Parmi les applications suivantes, déterminez celles qui sont des applications linéaires :

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$,
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$,
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$,
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - 2z$,
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$,
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2, y^2)$,

Exercice 22. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Déterminer le noyau de f. Est-ce que f est injective ?

c. Est-ce que f est surjective ?

Exercice 23. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y-z, x-y+z, -x+y+z)$.

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Montrer que f est injective.

c. Montrer que f est bijective et calculer $f^{-1}(a,b,c)$.
Calculer $f^{-1}(f(x,y,z))$ et $f(f^{-1}(a,b,c))$.

Exercice 24. On considère l'espace vectoriel $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq 4\}$ et on considère l'application f définie de E dans $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = Q$ avec $Q(X) = XP'(X) - P(X)$.

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Montrer que $f(E) \subset E$.

c. L'application f est-elle injective ?

d. L'application f considérée comme application de E dans E est-elle surjective ?

Exercice 25. (Partiel n° 2, 2012) Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1).$$

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

c. L'application f est-elle une injection ?

d. Le vecteur $(1,0,0,0)$ a-t-il un antécédent par f ? L'application f est-elle une surjection ?

Exercice 26. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2z, x+y+z, -x-2z)$

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. L'application f est-elle surjective ?

c. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f = \{au \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 27. Parmi les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes, lesquelles sont $\mathbb{R}$-linéaires, $\mathbb{C}$-linéaires ?

$$f_1(z) = z + a, \quad f_2(z) = az \quad \text{(dans les deux cas } a \text{ est un nombre complexe fixé)}$$
$$f_3(z) = \operatorname{Re}(z), \quad f_4(z) = \operatorname{Im}(z), \quad f_5(z) = \bar{z}.$$

Exercice 28. (Partiel n° 2, 2011)

a. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Donner la définition d'une application linéaire de E dans E.

b. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Les réponses devront être justifiées.
   - f_1 est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = x - y + 2z$.
   - f_2 est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = xy$.
   - f_3 est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x - y - 1$.
   - f_4 est définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = P'$ où P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P..

Exercice 29. (Partiel n° 2, 2011) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-ensemble de E.

a. Quand peut-on dire que F est un sous-espace vectoriel ?

b. Soit f une application linéaire de E dans E. On pose $F = \{u \in E \mid f(u) = 2u\}$.
Montrer que F est un espace vectoriel.

Exercice 30. (Partiel n° 2, 2011) Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit une application f comme suit :

$$f : E \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a - d.$$

a. Montrer que f est linéaire.

b. Définir $\operatorname{Ker} f$.

c. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

d. L'application f est-elle injective, surjective ? (Les réponses doivent être justifiées).

Exercice 31. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a + d = 0 \right\}.$$

a. Montrer que F est un espace vectoriel de E en utilisant la définition.

b. On considère l'application $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{R}$ qui à la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\mathrm{Tr}(A) = a + d$.
Montrer que Tr est une application linéaire.

c. En déduire une autre démonstration du fait que F est un espace vectoriel.

Exercice 32. Soit E, F et G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans G et g une application linéaire de F dans G. On définit une application h de $E \times F$ dans G par $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Montrer que h est une application linéaire.

Exercice 33. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ en posant $f(P) = a - d$, où $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

a. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$.

c. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 34. Soit n un entier strictement positif. On note $E = \mathbb{R}[X]_n$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application f de E dans E définie par $f(P) = Q$, où $Q(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$.

a. Montrer que f est une application linéaire et que $f \circ f = f$.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.