Algèbre 2

[*Familles libres, génératrices*]

Exercice 1. Les vecteurs $u \in E$ suivants sont-ils combinaisons linéaires des vecteurs v_i ?

a. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $v_1 = (1,-2)$, $v_2 = (2,3)$;
b. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2,5,3)$, $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (1,-1,4)$;
c. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (3,1,m)$, $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (1,-1,4)$ (on discutera selon les valeurs de m).

Exercice 2. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

a. $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$;
b. $x_1 = (1,0,0)$ et $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$;
c. $x_1 = (1,2,1)$ et $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$;
d. $x_1 = (1,-1,1)$ et $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, les familles données sont-elles des familles libres ?

a. $u = (1,2,3)$, $v = (1,-4,6)$;
b. $u = (1,2,-1)$, $v = (1,0,1)$, $w = (-1,2,-3)$;
c. $u = (1,2,1,0)$, $v = (-1,1,1,1)$, $w = (2,-1,0,1)$, $t = (2,2,2,2)$.
d. On considère les 3 polynômes P_i donnés par :
$P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 2X + 3X^2$, $P_3(X) = 3X - X^2 + X^3$.
e. On considère les 3 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = e^x$.
f. On considère les 3 polynômes Q_i donnés par :
$Q_1(X) = X - 1$, $Q_2(X) = X^2 - X + 1$, $Q_3(X) = 2X^2$.
g. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
h. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1,-1,4)$, $v = (1,2,3)$ et $w = (1,-1,2)$.
Montrer que (u,v,w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

a. $u = (2,1,1)$, $v = (1,3,1)$, $w = (-2,1,3)$;
b. $u = (1,0,3)$, $v = (0,1,2)$, $w = (2,-3,0)$;
c. $u = (2,1,1)$, $v = (1,2,1)$, $w = (1,1,2)$.

[*Bases, dimension*]

Exercice 6. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de E et sa dimension.

Exercice 7.

a. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (-1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$.
Montrer que la famille (u,v) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
b. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u = (1,1,1,1)$, $v = (-1,1,1,1)$.
Montrer que la famille (u,v) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8. Pour chacun des ensembles suivants, vérifier qu'il s'agit d'espaces vectoriels et en donner une base :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0\},\\ A_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0 \text{ et } x=0\},\\ A_3 &= \{(a+b, b-a, a+b), a, b \in \mathbb{R}\},\\ A_4 &= \{(a, 2a, a), a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Donner la dimension de chacun de ces espaces vectoriels.

Exercice 9. On considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est-elle une base de $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 10. (devoir 2002) On note $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ les 3 vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. On pose $v_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a. Écrire v_1,v_2 et v_3 sous forme de triplets de coordonnées.
b. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
c. Déterminer les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3) du vecteur w tel que $w = 2e_1 + e_3$.

Exercice 11. On considère les familles de vecteurs B_1, B_2 suivantes dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} B_1 &= ((1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)),\\ B_2 &= ((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)). \end{aligned}$$

a. Montrer que B_1 et B_2 sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
b. Soit X le vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base $B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de X dans la base B_1 en fonction de x, y, z.
c. Donner les coordonnées de X dans la base B_2 en fonction de x, y, z.

Exercice 12. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Trouver les coordonnées dans cette base du vecteur $u = (1,1,1)$. $(1,1,1)/2$

Exercice 13.

a. Montrer que les vecteurs $u_1 = (-1,2,3)$, $u_2 = (1,-2,3)$ et $u_3 = (1,2,-3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposer dans cette base le vecteur $u = (1,1,1)$. $(5,8,9)/12$
b. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,0,1)$ et $v_4 = (1,1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Décomposer dans cette base les vecteurs $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,0,0,0)$. $(1,1,1,1)/3$, $(-2,1,1,1)/3$

Exercice 14. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$: $y = 2x$, $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}((2,4,0), (0,0,2), (1,2,-2)),\\ F &= \mathrm{Vect}((2,4,0), (0,0,2), (2,2,0)). \end{aligned}$$

Exercice 15. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivant de $\mathbb{R}^4$.

a. $E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1 = (1,2,-3,4)$, $u_2 = (2,4,-5,9)$, $u_3 = (-2,-1,3,1)$, $u_4 = (3,0,-1,-4)$. *rang* 3, $5u_1 - 2u_2 + 2u_3 + u_4 = 0$
b. $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2 - x_3, x_4 = x_1 + x_2 + x_3\}$. $(2,1,0,3)$, $(-1,0,1,0)$

Exercice 16. (devoir 4, 2010)

a. Qu'appelle-t-on rang d'une famille de vecteurs ?
b. Soit $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ définie par :

$$u_1 = (1,0,2,1,2), \; u_2 = (1,2,-1,-1,0), \; u_3 = (2,1,0,0,1), \; u_4 = (0,1,1,0,1), \; u_5 = (3,4,0,-1,2).$$

Quel est le rang de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$?
Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Donner une base de F.

Exercice 17. (devoir 4, 2011)

a. Qu'appelle-t-on rang d'une famille de vecteurs ?
b. Soit $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ définie par :

$$u_1 = (1, 0, 0, 1, 2),\ u_2 = (1, 0, 1, 1, 0),\ u_3 = (2, -1, 0, 4, 3),\ u_4 = (0, -1, -1, 2, 1),\ u_5 = (2, 1, 2, 0, 1).$$

Quel est le rang de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$?
Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Donner une base de F.

[*Sommes et intersections de sous-espaces*]

Exercice 18. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\},$$
$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

Donne une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $v_1 = (0, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 1)$.
On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 20. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 3, -2, 2), \quad v_2 = (2, 7, -5, 6), \quad v_3 = (1, 2, -1, 0),$$
$$w_1 = (1, 3, 0, 2), \quad w_2 = (2, 7, -3, 6), \quad w_3 = (1, 1, 6, -2).$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

a. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F. $v_3 = 3v_1 - v_2$
b. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire une base de G. $w_3 = 5w_1 - 2w_2$
c. Montrer que la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$. $v_1 - v_2 - w_1 + w_2 = 0$, *rang* 3
d. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E. $(, 1, 0, 0, -4), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)$
e. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 21. (devoir 4, 2012)
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$, et on considère les vecteurs suivants de E :

$$u_1 = (1, -1, 0, 0),\ u_2 = (2, 2, 0, -1),\ v_1 = (-2, 0, 1, 1),\ v_2 = (0, 2, 1, 0).$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $H = \{x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t = 0\}$.

a. Montrer que les familles (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont libres.
b. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, v_1, v_2).
c. A l'aide des questions précédentes, déterminer $\dim F$, $\dim G$ et $\dim(F + G)$.
La somme $F + G$ est-elle directe ? Calculer $\dim(F \cap G)$.
d. Montrer que u_2 appartient à G, et en déduire une base de $F \cap G$.
e. Vérifier que G et H sont en somme directe.
En déduire que (v_1, v_2, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$, et donner un supplémentaire de G.

Exercice 22. (examen, 2012, session 1) On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(r + 2t, r + s + t, r + 2s, t - s) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}, \qquad G = \{(x, y, z, t) \mid x + y - 2z - t = 0\}.$$

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
b. Montrer que les vecteurs suivants forment une famille génératrice de F :

$$u = (1, 1, 1, 0), \quad v = (0, 1, 2, -1), \quad w = (2, 1, 0, 1).$$

Déterminer la dimension de F et une base de F. $F = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}w = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w.$
c. Déterminer la dimension de G et une base de G. $\dim G = 3$
d. Rappeler la formule permettant de calculer $\dim F \cap G$ en fonction des dimensions de F, G et $F + G$. Sans déterminer $F + G$ ni $F \cap G$, en déduire que $\dim F \cap G \geq 1$.

Exercice 23. (examen, 2012, session 2)
On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y - z - t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}.$$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer une base de F. $F = \mathbb{R}(-1, 2, 0, 1) + \mathbb{R}(0, 1, 1, 0)$

c. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (1, 1, 1, 0), \quad v = (1, 2, 1, 1), \quad w = (1, 0, 1, -1).$$

Déterminer le rang de la famille (u, v, w). 2

d. On note G le sous-espace engendré par la famille (u, v, w).
On admet que F et G engendrent $\mathbb{R}^4$.
   (i) Rappeler la formule permettant de calculer la dimension de $F \cap G$ en fonction des dimensions de F, G et $F + G$.
   (ii) Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

[*Applications linéaires : injectivité, surjectivité*]

Exercice 24. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_4 + x_5, x_2 + x_3 + x_4 - x_5).$$

a. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$. $((-1, 1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0, 0))$, *rajouter* (e_1, e_2)

b. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$. $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, *rajouter* e_1

Exercice 25. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On pose $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (0, -1, 1, 0)$, $u_4 = (-1, 1, 1, 1)$. On définit l'application linéaire f en posant $f(e_1) = u_1$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_3$, $f(e_4) = u_4$.

a. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déterminer $f(u)$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même. On expliquera la méthode choisie et on citera les propriétés utilisées.

Exercice 26. On travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3.

a. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. On définit les polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 en posant $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 2X$, $P_3(X) = -2 + 4X^2$, $P_4(X) = -12X + 8X^3$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Quelles sont les coordonnées du polynôme $X^2 + 2X - 1$ dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) ? $(1/2, 1, 1/4, 0)$

d. On définit une application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ en posant $f(P) = Q$ où Q est le polynôme défini par $Q(X) = XP'(X) - P(X)$.
   (i) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
   Calculer $f(P)$. En déduire $f(P_2)$. $f(P) = 2aX^3 + bX^2 - d$, $f(P_2) = 0$
   (ii) L'application f est-elle injective ? Déterminer $\operatorname{Ker} f$ (on donnera une base de $\operatorname{Ker} f$ et sa dimension). $\operatorname{Vect} X$
   (iii) Peut-on conclure sans calculs si f est surjective ou non ?
   Que vaut $\dim(\operatorname{Im} f)$? Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 27. (devoir 2008) On pose $u_1 = (1, 1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -1, -1)$, $u_3 = (-1, 1, 1, 1)$, $u_4 = (-1, 1, 1, -1)$.

a. Rappeler la définition du rang d'une famille de vecteurs.

b. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4). 3

c. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit f l'application linéaire définie par $f(e_i) = u_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   (i) On pose $u = (x, y, z, t)$. Déterminer $f(u)$.
   (ii) Calculer $f(u_4)$.
   (iii) L'application f est-elle injective ?
   Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. Que vaut $\dim(\operatorname{Ker} f)$? $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1, -1, -1, 1)$
   (iv) L'application f est-elle surjective ?
   Déterminer $\dim(\operatorname{Im} f)$.
   Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 28. (devoir 4, 2011)
On travaille dans $\mathbb{R}^4$.

a. Donner (sans démonstration) la base canonique et la dimension de $\mathbb{R}^4$.
On appellera $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ cette base canonique.

b. On définit les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 en posant

$$u_1 = (-2, -1, 1, 0),\ u_2 = (-1, -1, 0, 1),\ u_3 = (0, 1, 0, -2),\ u_4 = (1, 0, -1, -1).$$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

c. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u = (0, -2, -1, -2)$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) ? $(2, -1, -1, 3)$

d. On définit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ en posant $f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$.

(i) Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$. $f(u_1) = f(u_2) = 0$

(ii) L'application f est-elle injective ? Déterminer $\operatorname{Ker} f$: on donnera une base de $\operatorname{Ker} f$ et sa dimension.
Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^4$. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$

(iii) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$.
Soit $F = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

(iv) Montrer que $f(e_3) \in F$ et $f(e_4) \in F$. $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$ *et* $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2)$

(v) Soit $v \in \mathbb{R}^4$, montrer que $f(v) \in F$. En déduire que $\operatorname{Im} f = F$.

Exercice 29. (devoir 2009) On travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. On définit f de $R_3[X]$ dans $R_3[X]$ en posant $f(P) = 3P - P'$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

c. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
Calculer $f(P)$.

d. L'application f est-elle surjective ? Déterminer $\operatorname{Im} f$ (on donnera une base de $\operatorname{Im} f$ et sa dimension).

e. Peut-on conclure sans calculs si f est injective ou non ?
Que vaut $\dim(\operatorname{Ker} f)$?
Vérifier que si $P_3(X) = X^3$ alors $f(P) = 0$. Que peut-on en déduire ?

f. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ est une bijection.

Exercice 30. (devoir 2009) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = (0, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 2)$, $u_3 = (1, -1, 0)$. On définit l'application linéaire f en posant $f(e_1) = u_1$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_3$.

a. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(u)$.

b. Montrer que f est un isomorphisme (c'est à dire une application linéaire bijective) de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. On expliquera la méthode choisie et on citera les propriétés utilisées.

Exercice 31. (devoir 3, 2012)
On définit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (3x - 2y, 4x - 3y)$.
On définit les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (-1, -2)$.

a. Donner la définition d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer le noyau de f.

d. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

e. Calculer $f(v_1)$ ainsi que $f(v_2)$ en fonction de v_1 et v_2.

f. En déduire que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on a $f \circ f(v) = v$ puis que f est bijective (on donnera l'inverse de f).

[*Sommes directes et projections*]

Exercice 32. Dans $\mathbb{R}^5$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 2, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 3, 0, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 2, 0, 2, 0)$, et $v_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$. Montrer que $\mathbb{R}^5 = \operatorname{Vect}(u_1, u_2) \oplus \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 33. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $u = (1, -1)$. On pose $F = \operatorname{Vect} u$ et $G = \operatorname{Vect} e_1$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

b. Représenter sur une figure les sous-espaces F et G, les vecteurs suivants, ainsi que leurs projetés sur F parallèlement à G : $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$, $v_3 = (0, -2)$, e_1, e_2.

c. On note $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur F parallèlement à G. Calculer $p(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 34. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les droites $D : x - y = 0$ et $E : x + y = 0$.
On note p la projection sur D parallèlement à E.

a. Monter que $\mathbb{R}^2 = D \oplus E$. Ainsi p est bien définie.

b. Déterminer les images par p des vecteurs e_1, e_2 de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pourra faire une figure.

c. Calculer $p(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que $p \circ p = p$.

Exercice 35. On considère l'application linéaire $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par l'expression $p(x, y) = (x - 2y, 0)$.
Montrer que p est une projection. Déterminer les sous-espaces F, G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 36. On fixe un réel $a \neq -1$ et on considère l'application linéaire $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$p(x, y) = \tfrac{1}{a+1}(ax + y, ax + y).$$

Vérifier que p est une projection. Déterminer en fonction de a les sous-espaces F, G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 37. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}, \quad G = \operatorname{Vect}(1, 0, -1).$$

a. Montrer que F et G sont en somme directe.

b. Déterminer une base de F. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

c. Décomposer les vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la somme directe $F \oplus G$. $e_1 = \frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1, 2, -1) + \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$, $e_3 = \frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$

d. On note $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur F parallèlement à G. Déterminer l'expression de $p(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

e. Vérifier l'identité $p \circ p = p$. Montrer sans calcul que $p(2, 1, 1) = (2, 1, 1)$ et $p(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$.
Déterminer l'expression de $q(x, y, z)$, où q est la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 38. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \operatorname{Vect}(3, 1, 2), \quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + 2z = 0\}.$$

a. Déterminer une base de E. Montrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus E$.
On note p la projection sur D parallèlement à E.

b. Trouver un scalaire λ tel que $e_1 - \lambda(3, 1, 2) \in E$.
En déduire la décomposition de e_1 dans la somme directe $D \oplus E$, ainsi que la valeur de $p(e_1)$. $p(e_1) = (9, 3, 6)/14$

c. Calculer $p(e_2)$ et $p(e_3)$. Donner l'expression de $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $p(e_2) = (3, 1, 2)/14$, $p(e_3) = (6, 2, 4)/14$

Exercice 39. On considère l'endomorphisme $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$p(x, y, z) = \frac{1}{9}(5x - 4y + 2z, -4x + 5y + 2z, 2x + 2y + 8).$$

Montrer que p est une projection. Déterminer les sous-espaces F, G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G. $\operatorname{Im} F : 2x + 2y - z = 0$, $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(2, 2, -1)$

Exercice 40. Pour toute valeur des paramètres réels a, b on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par l'expression

$$f(x, y, z) = (ax + by + az, bx + ay + az, ax + ay + bz).$$

a. Calculer $(f \circ f)(1, 0, 0)$ en fonction de a et b. $(2a^2 + b^2, a^2 + 2ab, a^2 + 2ab)$
En déduire que si f est une projection, alors $a = b$.

b. Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme f est-il une projection non nulle ? $a = b = \frac{1}{3}$