Université de Caen
UFR Sciences
L1 MASS/Info

2e semestre 2012-2013
Mathématiques

Analyse 2

[*Limites*]

Exercice 1. On note $E(x)$ la partie entière de x. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{E(x)}=0.$$

Exercice 2. On note $E(x)$ la partie entière de x. Montrer que la fonction E n'a pas de limite en 0. Étudier la limite de $E(x^2)$ quand x tend vers 0.

Exercice 3.

a. Montrer que les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$.

b. Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\sin\tfrac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}e^{-x}x^2\sin x,\quad \lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x}\sin\tfrac{1}{x},\quad \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\sin x-\cos\tfrac{1}{x}\sin x.$$

Exercice 4. Étudier si les limites suivantes existent. Lorsque c'est le cas, les calculer.

$$l=\lim_{x\to0}\frac{2x^2-3x+2}{2x^2-x+1},\quad m=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+2}{2x^2-x+1},\quad n=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{x+3},\quad o=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x+3},$$
$$p=\lim_{x\to0}\frac{1+3x^2+x^3}{x+5x^2},\quad q=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+3x^2+x^3}{x+5x^2},\quad r=\lim_{x\to0}\frac{e^x-2x}{\sin x},\quad s=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}}{x},$$
$$t=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\cos(x)},\quad u=\lim_{x\to0}\frac{x}{1+\exp(\frac{1}{x})}.$$

[*Développements limités*]

Exercice 5. Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{1+2x},\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\qquad f(x)=\frac{x}{1+x^2},\qquad f(x)=\cos(x),\qquad f(x)=\sin(2x^2).$$

Exercice 6. Donner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes : $f(x)=e^{(x^2)}$, $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 7. Calculer les $DL_3(0)$ de

$$f:x\mapsto\frac{e^x}{\sqrt{1+x}},\quad g:x\mapsto\cos x\sin x,\quad h:x\mapsto e^{-x}\cos(3x),\quad i:x\mapsto\ln(1+x)\ln(1-x).$$

Exercice 8. Calculer les $DL_5(0)$ de

$$f:x\mapsto\operatorname{ch}(x)\sin(x),\quad g:x\mapsto\sqrt{1-x^3}\;\sqrt[3]{1+x^2},\quad h:x\mapsto\frac{1+x}{1-x},\quad i:x\mapsto\frac{\sin x}{\exp x}.$$

Exercice 9. Étudier l'existence d'un développement limité au voisinage de 0 de $g:x\mapsto\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{\sin x-\tan x}$.

Exercice 10. Calculer le $DL_4(1)$ des fonctions

$$f:x\mapsto\sqrt{x}\;\ln x \quad \text{et} \quad g:x\mapsto\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Exercice 11. Calculer, lorsqu'ils existent :

a. les $DL_3(1)$ de $(\ln x)/x^2$ et $e^x\sqrt{x}$,

b. les $DL_2(\frac{1}{4})$ de $\ln x$ et $\cos(\pi x)$,

c. le $DL_3(3)$ de $\sqrt{x-3}$.

Exercice 12. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d et une fonction $\varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniques tels que

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Donner la valeur de a, b, c et d.

Exercice 13. On se propose de calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^x$.

a. Effectuer le $DL_4(0)$ de $u(x) = x\ln(1+x)$ et vérifier que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.

b. Calculer le $DL_4(0)$ de $u(x)^2$, $u(x)^3$ et $u(x)^4$.

c. Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{u(x)}$.

d. Calculer le $DL_3(0)$ de $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 14. Calculer les $DL_4(0)$ de

$$f : x \mapsto e^{(e^x)}, \quad g : x \mapsto \ln(\cos x), \quad h : x \mapsto \sqrt{1-\sin(x)}.$$

Exercice 15. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$. *On utilisera le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-u}$.*
Quel est le $DL_5(0)$ de f ?

[*Calculs de limites*]

Exercice 16. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}, \quad m = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 3x}{\sin x}, \quad n = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}, \quad o = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+x},$$
$$p = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \quad q = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{1/x}}, \quad r = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x}{x}, \quad s = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(|x|^{x^2}-1),$$
$$t = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{(\sin x)^2}, \quad u = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x^2}{\cos x}\right), \quad v = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos \frac{\pi}{2}x}.$$

Exercice 17. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la quantité $\dfrac{(\sin x)^n}{\log(1+x^2)}$ admet-elle une limite finie quand x tend vers 0 ?
Lorsque c'est le cas, déterminer cette limite.

Exercice 18. Déterminer les limites suivantes :

$$l = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^3-1}, \quad m = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}, \quad n = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^3+x^2-x-1}, \quad o = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{(x-2)^2}.$$

Exercice 19. Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{2}{(\cos x)^2} + \dfrac{1}{\ln(\sin x)}$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
On réduira au même dénominateur après avoir posé $u = x - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 20. *(Partiel 4, 2010)* On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin x}$ et $g(x) = \dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - x}$.
Déterminer les limites de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers 0.
Pour g on pourra faire un DL à l'ordre 3.

Exercice 21. *(Examen, 2002)*

a. Donner sans justification les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 de e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\sqrt{1-x^2}$.

b. Déterminer si la limite suivante existe :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + e^x + e^{-x} - 4}{x \sin x - x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 22. *(Partiel, 2003) (Les questions* 2 *et* 3 *sont indépendantes.)*

a. Donner (sans justification) les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre 4 en zéro :

$$\ln(1+x), \quad \sin x, \quad \cos x, \quad (1+x)^a \quad a \in \mathbb{R} \text{ fixé}.$$

b. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - \cos x}.$$

c. Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}}.$$

[*Continuité*]

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

a. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

b. Peut-on prolonger f par continuité à l'origine ?

Exercice 24. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

– $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$

– $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$

– $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c \\ ax+b & \text{si } x > c. \end{cases}$

Pour la dernière fonction a, b, c sont des constantes données.

Exercice 25. *(Partiel, 2006)* Les réels a, b, α sont des paramètres. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 1, \\ ax+b & \text{si } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -e^{-\alpha x} & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

a. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est continue quels que soient les valeurs de a, b, α.

b. À quelle condition, nécessaire et suffisante, la fonction f est-elle continue à l'origine ?

c. (i) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

(ii) Déterminer α, a, b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 26. *(Partiel, 2006)* On pose $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ pour $x > 0$, $x \neq 1$.

a. Peut-on prolonger f par continuité en 0^+ ?

b. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$ et $\sqrt{1+x}$.

c. Déterminer la limite de $f(x)$ en 1, si elle existe.
On pourra utiliser le changement de variable $x = 1+y$.

d. Que se passe-t-il quand x tend vers $+\infty$?

Exercice 27. *(Partiel, 2008)* On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$ pour $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$.
Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 28. On considère les équations

$$\begin{array}{ll} (E) & 2^x - 5x = 0, \\ (F) & x^7 - 3x - 1 = 0. \end{array}$$

Montrer que (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$ et que (F) en admet au moins une dans $[1, 2]$.

Exercice 29. *(Partiel, 2008) (Les trois questions sont indépendantes.)*

a. Montrer que l'équation $(E)\ :\ x^2(\cos x)^n - x \sin s + 1 = 0$ admet au moins une racine dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$.
Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 2$.

c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 30. Soient x, $y \in \mathbb{R}_+$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $(x + y)f(c) = xf(a) + yf(b)$.

Exercice 31. *(Partiel 4, 2009)*

a. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe au moins un point $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 32. *(Partiel 4, 2010)*

a. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b. On considère l'équation $(E_n) : x^5 + (1 + \frac{1}{n^2})x + 2 + \frac{1}{n} = 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (E_n) admet au moins une solution $x_n \in [-2, 0]$.

Exercice 33. *(Partiel 4, 2011)*

a. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b. On considère l'équation $(E_n) : x^3 + (n^2 + 1)x + 2n + 1 = 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (E_n) admet au moins une solution $x_n \in [-1, 0]$.

Exercice 34. *(Partiel 4, 2010)*
On pose $f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$. Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 35. *(Partiel 3, 2009)*
On fixe $a \in \mathbb{R}_+$ et on définie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + ax^2)}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ 3(\cos x)^2(\sin x) + 3 & \text{si } x \in [0, \pi], \\ \dfrac{\sqrt[3]{1 + x - \pi} - 1}{x - \pi} + b & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

a. Calculer $\lim_{x\to0^-} f(x)$.

b. Calculer $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ et en déduire $\lim_{x\to\pi^+} f(x)$.

c. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 36. *(Partiel 4, 2011)* Soit a un réel et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = a$ et $f(x) = \frac{1}{x^3} \ln(1 + x + \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Peut-on choisir a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?