Analyse 3

[*Dérivation*]

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in \,]0,1[\, \cap \,]1,+\infty[. \end{cases}$$

a. La fonction f est-elle continue en 0 ?

b. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ pour tout $x \in \,]0,1[$.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d. Dresser le tableau de variation de f et préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{-\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b. Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$ on a $-\ln x > 1 - x$ et étudier la dérivabilité de f en 1.

c. Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 3. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (partiel 2006)

On définit les fonctions f_1, f_2 en posant $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

a. Déterminer les domaines de définition de f_1 et f_2.

b. Rappeler la définition de la dérivée d'une fonction f en un point x_0.

c. Écrire le rapport de dérivation au point $x_0 = 0$ pour les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

d. Déterminer les limites de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ lorsque x tend vers 0.

e. Montrer qu'on peut prolonger f_1 et f_2 par continuité à l'origine.

Exercice 5. (partiel 2007) Soit a, b des paramètres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 + 2(x+a) + b & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a. Calculer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

b. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que f soit continue en 0 ?

c. On suppose désormais que f est continue à l'origine.

   (i) Calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.

   (ii) Peut-on choisir a et b pour que f soit dérivable en 0 ?

Exercice 6.

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(0) = 0$, et $f(x) = \frac{1}{x}(\ln(1+x) - x - \frac{1}{2}x^2)$ pour $x \neq 0$.

a. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable sur $]-1,+\infty[$? Déterminer $f'(0)$.

c. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$?

Exercice 7. On pose $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 - \ln(1 - \frac{1}{2}x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.
Peut-on prolonger la fonction f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

c. La fonction obtenue est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

d. Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f.

[*Accroissements finis*]

Exercice 8.

a. Énoncer le théorème de Rolle.

b. En utilisant ce théorème, montrer que l'équation $3x^5 + 15x - 1 = 0$ admet une unique racine réelle.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

a. Montrer que $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \geq 1$.

b. Montrer que pour tous a, $b \geq 1$ on a $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$.

c. Vérifier que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et déduire de la question précédente que $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$ pour tout $x \geq 1$.

d. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

  (i) Montrer par récurrence qu'on a $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.

  (ii) Montrer par récurrence qu'on a $|u_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}$ pour tout n.

  (iii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
  Expliquer comment calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près en utilisant la suite $(u_n)_n$.

Exercice 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Étudier la fonction f et en déduire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

b. Étudier la fonction f' et en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour $x \in [0, 1]$.

c. Montrer qu'on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$ pour tous x, $y \in [0, 1]$.

d. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

e. Montrer qu'on a $|u_n - \alpha| \leq 4^{-n}$ pour tout n. La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle ?
Trouver un entier N pour lequel $|u_N - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et a un réel fixé. Déterminer les limites suivantes en fonction des dérivées de f en a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a-t)}{t}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t^2},$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+3t) - 3f(a+2t) + 3f(a+t) - f(a)}{t^3}.$$

Application : déterminer $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}(\sqrt{2+t} + \sqrt{2-t} - 2\sqrt{2})$.

Exercice 13. Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

a. Exemple : $a = 2\pi$ et $f(x) = 1 - \cos x$. Tracer l'allure du graphe de f sur $[0, 2\pi]$. Discuter graphiquement l'existence de points $(x, f(x))$ en lesquels la tangente au graphe de f passe par l'origine.

b. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
Montrer qu'il existe au moins 2 points du graphe de f sur $[0, a]$ en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exercice 14. (partiel 2011)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit une fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln x$.

a. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (i) Rappeler la formule exprimant $\frac{y^n - 1}{y-1}$ comme polynôme pour tout $y \neq 1$.
   (ii) Montrer que $y - 1 \leq \frac{1}{n}(y^n - 1)$ pour tout $y \geq 1$.

b. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (i) Calculer et factoriser $f_n'(x)$, pour tout $x > 0$.
   (ii) Monter que pour tout $x \geq 1$ on a $|f_n'(x)| \leq \frac{x-1}{n}$.
   (iii) En déduire qu'on a $|f_n(x)| \leq \frac{(x-1)^2}{n}$ pour tout $x \geq 1$. *(On notera que $f_n(1) = 0$.)*

c. On fixe un réel $x \geq 1$.
   (i) Déterminer $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{x} - 1)$.
   (ii) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x$.
   Ce résultat est-il encore valable pour $x \in]0, 1[$? *(On pourra poser $y = 1/x$.)*

[*Études de fonctions*]

Exercice 15. (partiel 2011)
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$.

a. Déterminer les limites de f en 0^+ et 0^-. Que peut-on en déduire ?
b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
c. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
d. Montrer que f est dérivable à gauche en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
e. (Question hors barême)
   (i) Faire un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $g(y) = yf(\frac{1}{y})$.
   (ii) Trouver des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \epsilon(x)$, avec $\lim_{+\infty} \epsilon = 0$.
   (iii) En déduire que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera l'équation et la position par rapport à la courbe.
f. Représenter graphiquement la courbe de f avec tous les éléments obtenus aux questions précédentes.

Exercice 16. On se propose d'étudier le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa continuité.
b. Calculer la dérivée f' et l'écrire sous la forme $f'(x) = xv(x)$.
c. Étudier les variations de $v(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
d. Effectuer un développement limité de $u \mapsto uf(\frac{1}{u})$ à l'ordre 1 en 0.
   (On admettra que $\arctan(t) = t + t^2\epsilon(t)$ *avec* $\lim_0 \epsilon = 0$.*)*
   En déduire que le graphe de f admet une asymptote D en $+\infty$ et $-\infty$ dont on précisera l'équation.
e. Montrer que le graphe de f coupe D en un unique point d'abscisse x_0, et que $x_0 \in [-2, -1]$. Pour cela on pourra étudier la fonction g définie par
$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1-x}{x^2}.$$
f. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$. Construire le graphe de f.

Exercice 17. Représenter l'allure du graphe de $f : x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+1)}$ et étudier l'existence d'asymptotes.

Exercice 18. (partiel 2011)
On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f et vérifier que f est impaire.
   Montrer qu'on peut étendre f par continuité à $[-1, 1]$: on notera encore f cette extension.
b. Étudier la dérivabilité de f sur D. On étudiera notamment l'existence de demi-tangentes en -1 et 1.
c. En multipliant l'expression de f par $1 + \sqrt{1 - x^4}$ en haut et en bas, montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$.
   Calculer la dérivée correspondante.
d. Établir le tableau de variations de f et représenter l'allure de son gaphe.