Université de Caen
UFR Sciences
L1 MASS/Info

2e semestre 2012-2013
Mathématiques

Analyse 4

[*Sommes de Riemann*]

Exercice 1. Déterminer les limites des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$: $A_n \to \frac{\pi}{4}$, $B_n \to \frac{\ln 2}{2}$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2}, \quad C_n = \frac{1}{n}(1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots \sqrt[n]{2^n}),$$
$$D_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}, \quad E_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha, \quad F_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \cos\frac{k\pi}{n}.$$

Exercice 2. À l'aide des sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes $A = \int_0^1 t\mathrm{d}t$, $B = \int_0^1 e^t\mathrm{d}t$.

Exercice 3. On pose $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$.

a. Montrer que $\lim_{n\to\infty} V_n = \sin 1 - \cos 1$.
b. On rappelle que $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
   (i) Trouver une suite (W_n) de limite nulle telle que $V_n - W_n \leq U_n \leq V_n$ pour tout n.
   (ii) Déterminer $\lim_{n\to\infty} U_n$.

[*Intégrales, primitives, équations différentielles*]

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \ln(1+\ln 2)$, $I_2 = 2\arctan(e) - \frac{\pi}{2}$, $I_3 = \frac{\pi}{4}$, $I_4 = e-2$, $I_5 = 2(\ln(2)-1)^2$, $I_6 = (e^2-1)/4$, $I_7 = -\frac{1}{2}$, $I_8 = \sqrt{2}-1$, $I_9 = \frac{3}{4} - \ln 2$, $I_{10} = (\ln 7 - \ln(10-3e))/3$, $I_{11} = \frac{1}{6}\arctan\frac{2}{3}$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}, \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t, \quad I_4 = \int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x,$$
$$I_5 = \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x, \quad I_6 = \int_1^e x(\ln x)^2\mathrm{d}x, \quad I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\ \mathrm{d}x, \quad I_8 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x,$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^3(\sin x)^3}{1+(\sin x)^2}\mathrm{d}x, \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x\mathrm{d}x}{10-3e^x}, \quad I_{11} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9}.$$

Exercice 5. Déterminer les primitives des fonctions suivantes : $F_1(x) = 2\sqrt{x} + 2 - 2\ln(\sqrt{x}+1)$, $F_2(x) = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}$, $F_3(x) = \ln(x\ln x)$, $F_4(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+2)$, $F_5(x) = xe^x$, $F_6(x) = e^x(\sin x - \cos x)/2$, $F_7(x) = x\arctan x - \ln(1+x^2)/2$, $F_8(x) = x\sin(2x)/2 + \cos(2x)/4$, $F_9(x) = (\arctan x)/2 - x/(2+2x^2)$, $F_{10}(x) = -\frac{2}{9}\ln(x+2) + \frac{2}{9}\ln(x-1) - 1/3(x-1)$, $F_{11}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{25}{6}$, $F_{12}(x) = (2x-1)\sin x - (x^2-x+1)\cos x$, $F_{13}(x) = x + 1/(x-1)$, $F_{14}(x) = \frac{2}{5}\sqrt{\cos x}(5-4(\cos x)^2)$: *poser* $u = \sqrt{\cos x}$

$$f_1(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad f_2(x) = x^2\sqrt{1+x^3}, \quad f_3(x) = \frac{1+\ln x}{x\ln x}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{2+x^3},$$
$$f_5(x) = (x+1)e^x, \quad f_6(x) = e^x\sin x, \quad f_7(x) = \arctan x, \quad f_8(x) = x\cos 2x,$$
$$f_9(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}, \quad f_{10}(x) = \frac{x}{x^3-3x+2}, \quad f_{11}(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$
$$f_{12}(x) = (x^2-x+3)\sin x, \quad f_{13}(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \quad f_{14}(x) = \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos x}}.$$

Exercice 6. (partiel, 2008) Calculer les intégrales suivantes en faisant apparaître le détail des calculs : $I = 2$, $K = 1$, $L = \ln(2) - 1$

$$I = \int_\pi^{2\pi} x\cos x\mathrm{d}x, \quad J = \int_{\ln\pi}^{\ln 2\pi} e^{3x}\sin(e^x)\mathrm{d}x, \quad K = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x, \quad L = \int_1^e \frac{\ln(x)-1}{x(\ln(x)+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Pour J la réponse est $4-5\pi^2$, on pourra commencer par un changement de variable.
Pour L on pourra utiliser l'identité $\frac{u-1}{(u+1)^2} = \frac{1}{u+1} - \frac{2}{(u+1)^2}$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par la formule $f(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x+3)^2(x^2+1)}$.

a. Déterminer les réels a, b, c, d tels que $f(x) = \dfrac{a}{(x+3)^2} + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$. $(-40, 6, -6, 8)/25$

b. Déterminer les primitives de f sur $]-3, +\infty[$. $(-3\ln(1+x^2) + 8\arctan x + 6\ln(x+3) + 40/(x+3))/25$

Exercice 8. (examen, session 1, 2010)

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\mathrm{d}x$. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

b. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t}$. $2\ln\frac{3}{2}$

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}\mathrm{d}t}{1+e^t}$. $\ln\frac{2}{e+1} + e - 1$

d. On pose $g(u) = \dfrac{1}{(u+1)(u+2)(u^2+4)}$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

(i) Déterminer les réels a, b, c, d tels que $g(u) = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u+2} + \frac{cu+d}{u^2+4}$. $(8, -5, -3, -2)/40$

(ii) Déterminer une primitive de la fonction $h : u \mapsto \frac{1}{u^2+4}$ sur $\mathbb{R}_+$. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$

(iii) En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) Déterminer une primitive de la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{(1+\cos t)(2+\cos t)(5-(\sin t)^2)}$ sur $\int]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes.
On donnera également la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

a. $y + 4y = 0$,

b. $2y' - 3y = 0$,

c. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$, $(C + \ln(1+e^x))e^{-x}$

d. $y' + y = e^x - 1$, $Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x - 1$

e. $y' + 2y = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2x}$, $(C + 2\sqrt{x})e^{-2x}$

f. $y' + 2y = \frac{2x-1}{x^2}$, $Ce^{-2x} + \frac{1}{x}$

On commencera par résoudre les équations sans second membre.
Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $x^2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $e^{-\frac{1}{x}}$

b. $(x\ln x)y' - y = 0$ sur $]1, +\infty[$, $C\ln x$

c. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $Cx + \frac{1}{2}x^3$

d. $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $Cx^2 + x^3$

e. $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$ sur $]-1, +\infty[$, $C(x+1)e^{-x} + x - 2$

f. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$, $Ce^{x^2} + e^x$

g. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$. $\ln(1+x) + C/(1+x)$

On commencera par résoudre les équations sans second membre en calculant une primitive. Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 11. Pour $x > 1$ on pose $g(x) = \dfrac{1+x}{x(1-x)}$, $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$, $k(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$.

a. Déterminer les réels a, b tels que $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$ pour tout $x > 1$. $(1, 2)$
En déduire une primitive de g sur $]1, +\infty[$. $\ln(x) - 2\ln(x-1)$

b. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de h.
On pourra utiliser l'identité $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$. $\ln(\sqrt{x}-1) - \ln(\sqrt{x}+1)$

c. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de k. $-\sqrt{x}/(x-1) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+1)$

d. À l'aide des questions précédentes, résoudre l'équation différentielle suivante sur $]1, +\infty[$: $\frac{1}{2} + \frac{x-1}{\sqrt{x}}(C + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{x}-1))$

$$2x(1-x)y' + (1+x)y = x.$$

On commencera par l'équation sans second membre. $C\frac{x-1}{\sqrt{x}}$

Exercice 12.

a. Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que $-D(1+1/e) + De^{-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

b. Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que *constantes*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

[*Propriétés des intégrales*]

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx}\mathrm{d}x$.

a. Étudier la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0, n]$.
b. Majorer I_n et montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{n \sin x}{n + x}\mathrm{d}x$.
En utilisant l'identité $\frac{n}{n+x} = 1 - \frac{x}{n+x}$, déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n\mathrm{d}x$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout n.
b. Déterminer le signe de I_n pour tout n.
c. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
d. La suite $(I_n)_n$ est-elle convergente ? Justifier.
e. (i) Donner une primitive de la fonction $\varphi : x \mapsto (n + 1)(\ln x)^n/x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (ii) En utilisant l'identité $x^2(\ln x)^n = \frac{x^3}{n+1}\varphi(x)$, montrer qu'on a $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ pour tout n.
   (iii) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_n$?

Exercice 16. (examen, session 1, 2011) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1 + e^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout n.
b. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire la valeur de I_0 $\quad I_0 = 1 + \ln 2 - \ln(1 + e)$
c. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est positive et monotone.
d. Montrer qu'on a $2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   En déduire un encadrement de I_n.
e. Déterminer les limites $\lim_{n\to\infty} I_n$, $\lim_{n\to\infty} e^{-n}I_n$. $\quad +\infty,\ 0$

Exercice 17. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées :

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad g(x) = \int_x^{x+x^2} e^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 18. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x (t - x)f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout x. Étudier la dérivabilité de φ et déterminer φ' le cas échéant.

Exercice 19. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 20. On considère les fonctions f, $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2}\mathrm{d}t, \quad g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1 + t^2}\, dt.$$

a. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout $x > 0$.
b. Étudier les variations de f.
c. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x > 0$, ainsi que $g(1)$.
   En déduire une expression de g sans intégrale.
d. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{s}$, retrouver l'expression de g.

Exercice 21. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite de φ en 0. *On pourra utiliser l'encadrement* $1 \leq e^t \leq 1 + 2t$ *valable pour* $t \in [0, 1]$.
b. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
c. Étudier les variations de φ.

Exercice 22. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $I(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}$ et $K(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

a. Calculer $K(u)$ pour tout u.
b. Montrer qu'on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
c. En déduire que $|K(u) - I(u)| \leq \frac{u^2}{4}$ pour tout $u > 0$.
d. Montrer que $\lim_{u \to 0} I(u) = \ln 2$.

Exercice 23. (examen, session 1, 2010)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

a. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur de $f'(0)$. $f'(0) = 1$
b. (i) Étudier la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x(x - 1) + 1$.
   (ii) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$.

c. (i) Montrer que la formule précédente définit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable.
   (ii) Montrer que $\varphi'(x) = e^x f(x)$. Étudier les variations de φ.
d. On veut étudier la limite de φ en $+\infty$. On suppose donc que x est positif.
   (i) Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$ on a $f(t) \geq \frac{e^x - 1}{t}$.
   (ii) En déduire une minoration de $\varphi(x)$ puis la limite de φ en $+\infty$. $+\infty$
e. On veut étudier la limite de φ en $-\infty$. On suppose donc que x est négatif, de sorte que $2x \leq x$.
   (i) En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, déterminer un encadrement de f sur $[2x, x]$, puis en encadrement de $\varphi(x)$.
   (ii) Déterminer la limite de φ en $-\infty$ $-\ln 2$
f. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ.

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = e^{-t^2}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que f est paire, dérivable, et étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.
b. Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout x et montrer que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire.
c. Déterminer $F'(x)$ pour tout x et les variations de F.
d. Montrer qu'on a $F(x) \leq xe^{-x^2}$ pour tout $x \geq 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
e. Représenter l'allure du graphe de F en précisant la tangente en 0.

Exercice 25. (examen, session 1, 2011) On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = \ln 2$.

a. Justifier l'existence de $f(x)$ pour tout x.
b. À l'aide d'un changement de variable, montrer que f est paire.
c. (i) Calculer $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
   (ii) Montrer que $f(x) = \ln 2 - \int_x^{2x} \frac{1 - \cos t}{t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \neq 0$.
   (iii) Montrer qu'on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \geq 0$.
   (iv) En déduire que $|f(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}x^2$ pour tout $x \geq 0$.
   (v) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
d. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
e. Étudier la dérivabilitté de f en 0 et déterminer $f'(0)$ s'il existe.
   Que peut-on en déduire pour la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ?
f. (i) Montrer qu'on a $f(x) = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.
   (On pourra utiliser une intégration par parties.)
   (ii) Montrer que $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.
   (iii) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.
g. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. *(On rappelle que* $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$.*)*
   En déduire l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.