université de Caen Basse-Normandie UFR Sciences	ANNÉE 2013-2014 **Première session** **08/01/2013**

LICENCE de Mathématiques 3[e] année
Contrôle terminal ULM5CT
Espaces Métriques
3 heures

Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Chaque candidat doit noter son nom en début d'épreuve dans le coin de la copie et le cacher par collage <u>*après*</u> *le pointage. Il doit, en outre, noter son numéro de place sur chacune de ses copies.*

Exercice 1. On note $N_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.
On fixe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque, et on définit $d_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$d_f(x, y) = N_2((y, f(y)) - (x, f(x))).$$

1. Montrer que d_f est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une formule pour $d_f(x, y)$ dans le cas où f est la fonction valeur absolue.
   On fera deux cas selon que x, y sont de même signe ou pas.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $N_1 : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$. Pour $f \in L(\mathbb{R}^2)$ on note $\|f\|$ la norme d'opérateur de f relativement à N_1 au départ et à l'arrivée.

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{5}(3x + 2y, x + y)$.
   Montrer que $\|f\| = \frac{4}{5}$.
2. On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{5}(x^3 + y^2, \cos(x + y))$.
   On pose $K = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.
   a. Montrer que K est complet et que $g(K) \subset K$.
   b. Montrer qu'on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$ pour tous a, $b \in \mathbb{R}$.
   c. Montrer qu'on a $\|g(x', y') - g(x, y)\|_1 \leq \frac{4}{5}\|(x', y') - (x, y)\|_1$ pour tous (x, y), $(x', y') \in K$.
3. On considère le système

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5x & = & x^3 + y^2, \\ 5y & = & \cos(x + y). \end{array} \right.$$

   Montrer que (S) admet une unique solution dans $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

suite au verso

Exercice 3. Soit n un entier fixé. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de la norme $N_1 : v = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_i |x_i|$. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de taille n, et $f : E \to E$ est l'endomorphisme associé dans la base canonique, on note $\|M\| = \|f\|$ la norme d'opérateur de f relative à la norme N_1 au départ et à l'arrivée.

On note $\mathcal{C} \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{ij}$ à coefficients positifs, c'est-à-dire telles que $m_{ij} \geq 0$ pour tous i, j. On note $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M telle que sur chaque colonne, la somme des coefficients vaut 1 : autrement dit $M = (m_{ij})_{ij}$ est dans $\mathcal{S}$ **ssi** $\sum_i m_{ij} = 1$ pour tout j.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont des fermés de $M_n(\mathbb{R})$. Sont-ils compacts ?
2. Soit $M = (m_{ij})_{ij}$ une matrice dans $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$, $f \in L(E)$ l'endomorphisme associé à M et $v = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ un vecteur. Calculer $N_1(f(v))$ et en déduire que $\|M\| \leq 1$.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer qu'il existe un réel K tel que $|\det(M)| \leq K$ pour toute matrice $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$.

Exercice 4. On note E l'espace des fonction continues $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.
On considère les sous-espaces suivants de E :

$$\begin{aligned} F &= \big\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ paire}\big\}, \\ G &= \big\{P : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale}\}, \\ H &= \big\{P : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale et paire}\big\}. \end{aligned}$$

1. Rappeler quel théorème permet d'affirmer que G est dense dans E.
2. Montrer que F est fermé dans E.
3. Soit f un élément de F, et $(P_n)_n$ une suite d'éléments de G qui converge vers f.
   a. On pose $Q_n(t) = \frac{1}{2}(P_n(t) + P_n(-t))$. Montrer que $(Q_n)_n$ converge vers f dans E.
   b. Montrer que H est dense dans F.
4. On recherche les fonctions $f \in E$ vérifiant la propriété

$$(\mathrm{I}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-1}^{1} f(t) t^{2n} \mathrm{d}t = 0.$$

   a. Montrer que si f est paire et vérifie (I) alors $f = 0$.
   b. Montrer que les fonctions vérifiant (I) sont les fonctions impaires.