

TOPOLOGIE

Exercice 1. Dire si les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant :

- | | |
|---|---|
| a. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ | b. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ |
| c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$ | d. $([2, 3] \cup \{0\}) \times [-1, 1]$ |
| e. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2 + y^2) \geq 0\}$ | f. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ |
| g. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \leq 2 \text{ et } x - y \geq 0\}$ | h. $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ |
| i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}$ | j. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$ |

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0, 0)$.

Exercice 2. (*partiel 2011-2012*)

On considère le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^2 : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\exp(x)) > \frac{1}{2}\}$.

- a. Exprimer A comme image réciproque d'un intervalle et en déduire que A est ouvert.

Pour tout réel x on note $E(x)$ la partie entière de x , et $F(x) = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x . On considère le sous-ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} \mid F(\exp(x)) > \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}$.

- b. Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif fixé.
 Montrer que le sous-ensemble $B_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k + \frac{1}{2} < \exp(x) < k + 1\}$ est ouvert.
- c. Montrer avec soin que $B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$. Montrer que B est ouvert.
 Pourquoi ne peut-on pas procéder comme à la question 1 ?

Exercice 3. Déterminer la frontière, l'adhérence et l'intérieur des sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^n :

- | | |
|--|---|
| a. $]0, 1] \subset \mathbb{R}$ | b. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ |
| c. $\{(x, y) \mid x^2 \leq y < x + 2\} \subset \mathbb{R}^2$ | d. $\{(\cos t, \sin t)\} \subset \mathbb{R}^2$ |
| e. $\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ | f. $\{(t, \sin(1/t)) \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}$ |

Exercice 4. On se place dans $E =]-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup]3, +\infty[$, muni de la distance induite par la distance usuelle de \mathbb{R} . On note $B_o = B(1, 1)$ (resp. $B_f = \bar{B}(1, 1)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre 1 et rayon 1.

- a. Expliciter les sous-ensembles suivants de \mathbb{R} :

$$B_o, \overset{\circ}{B}_o, \bar{B}_o, B_f, \bar{B}_f, \overset{\circ}{B}_f, \text{Fr } B_o, \text{Fr } B_f.$$

Maintenant E est un espace vectoriel normé. On fixe $a \in E$, $r > 0$ et on note $B_o = B(a, r)$ (resp. $B_f(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et rayon r .

- b. Montrer que $\bar{B}_o = B_f$ et $\overset{\circ}{B}_f = B_o$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et $A, B \subset E$.

- a. Montrer que le complémentaire de $\overset{\circ}{A}$ est la fermeture de cA .
 Montrer que le complémentaire de \bar{A} est l'intérieur de cA .
- b. (i) Montrer que $\text{Fr } \bar{A} \subset \text{Fr } A$ et $\text{Fr } \overset{\circ}{A} \subset \text{Fr } A$.
 (ii) Donner un exemple où les inclusions précédentes sont strictes.
- c. (i) Montrer que $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$.
 (ii) Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.
 (iii) Montrer qu'il y a égalité lorsque $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.
- d. (i) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
 (ii) Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.
 (iii) Montrer qu'il y a égalité lorsque $\text{Fr } A \cap \text{Fr } B = \emptyset$.

Exercice 6. (partiel 2012-2013)

Soit (X, d) un espace métrique et a un point de X .

Pour tout $x \in X$ on pose $d'(x, x) = 0$, et $d'(x, y) = \max(d(a, x), d(a, y))$ pour tous $x \neq y$ dans X .

- Montrer que d' est une distance sur X .
- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X .
 - Montrer que $(x_n)_n$ converge vers a relativement à d si et seulement si $(x_n)_n$ converge vers a relativement à d' .
 - On suppose que $(x_n)_n$ converge au sens de d' vers un point $l \in X$ différent de a .
Montrer qu'on a $x_n = l$ à partir d'un certain rang.
- Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque.
Montrer que f est continue relativement à d' en tout point $x \in X$ différent de a .
- On suppose $X = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle d . La distance d' est-elle équivalente à d ?

Exercice 7. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ non vide.

- Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.
En déduire que l'application $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ est continue.
- On note $A_r = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$. Montrer que A_r est ouvert. Déterminer $\bigcap_{r>0} A_r$ en fonction de A .
Montrer que tout fermé de E est intersection dénombrable d'ouverts.
- Soit F_1, F_2 deux fermés disjoints de E . En considérant l'application $(x \mapsto d(x, F_1) - d(x, F_2))$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$.

Exercice 8. (rattrapage 2011-2012)

On considère $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire et de la norme usuels. On fixe une base (u_1, \dots, u_n) de \mathbb{R}^n et on définit $N : L(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ en posant $N(f) = \sum_{i=1}^n \|f(u_i)\|$.

- Montrer que N est une norme sur $L(E)$. Dans la suite $L(E)$ est muni de cette norme.
- On fixe $v \in E$. Montrer que $F_v = \{f \in L(E) \mid v \cdot f(v) \geq 0\}$ est un fermé de $L(E)$.
- On note $L(E)_+$ l'ensemble des applications linéaires $f \in L(E)$ telles que $v \cdot f(v) \geq 0$ pour tout $v \in E$. Montrer que $L(E)_+$ est un fermé de $L(E)$.
- On note $B = \{f \in L(E) \mid \sum_{i=1}^n \|f(u_i)\| \leq 1\}$, et $B_+ = B \cap L(E)_+$.
Montrer qu'il existe deux constantes $m, M \in \mathbb{R}$ telles que $m \leq \det(f) \leq M$ pour toute $f \in B_+$.

Exercice 9. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{i,j} |m_{ij}|$.

Rappelons qu'on note $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

- Montrer que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. Montrer qu'à partir d'un certain rang k , la matrice $A - k^{-1}I_n$ est inversible.
On pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le fait que A ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres.
- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
- Application. On admet que la fonction qui à $A \in M_n(\mathbb{R})$ associe $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n$ est continue.
 - Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si A est inversible.
 - En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10. On considère $E = C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

- Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in E \int_{-1}^1 fg = 0$. Montrer que $f = 0$.
- Montrer que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.
- Montrer que $F = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ est dense dans E .
- Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in F \int_{-1}^1 fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 11. Dans cet exercice on va montrer qu'un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r \in \mathbb{R}$, soit dense dans \mathbb{R} . On suppose $G \neq \{0\}$ et on pose $r = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

- On suppose que la borne inférieure r est atteinte.
 - En écrivant $a \in G$ sous la forme $a = kr + x$ avec $x \in [0, r[$, montrer que $G = r\mathbb{Z}$.
 - Montrer que G est fermé dans \mathbb{R} .
- On suppose que la borne inférieure r n'est pas atteinte. On fixe $\epsilon > 0$.
 - Montrer qu'il existe $a, b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tels que $|a - b| < \epsilon$.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in G$ tel que $|x - c| < \epsilon$. Conclure.