Espaces compacts

Exercice 1. Dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont compacts, en justifiant la réponse :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 2xy \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 3e^{xy} \leq 1\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\cos(x) + 2\sin(x) > 3\}.$$

Exercice 2. On fixe un intervalle $I = [a,b]$. Soit f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

a. On suppose que $f(x) > 0$ pour tout x.
Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $Af(x) > g(x)$ pour tout x.

b. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout x, et que $g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) > 0$.
Montrer que le résultat de la question précédente est encore valable.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé.
On note $S = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$ la sphère unité de E, et $B = \{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$ la boule unité fermée.

a. Montrer que si B est compacte, S est aussi compacte.

b. On veut montrer la réciproque : on suppose S compacte, et on fixe une suite $(v_n)_n$ quelconque à valeurs dans B.

(i) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s-croissante telle que la suite $(\|v_{\varphi(n)}\|)_n$ converge.

(ii) Montrer que $(v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans B.

Exercice 4. *(Examen 2012-2013)*
On fixe un entier $n > 0$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n. On considère les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs colonnes.
On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $N : (x_i)_i \mapsto \|(x_i)_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque.

a. On fixe un vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n, A \mapsto AV$ est continue.

b. On fixe un vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que $G = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|AV\| = \lambda\|V\|\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ relativement à N, et on pose $H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists V \in S \ \ \|AV\| = 1\}$. Soit $(A_n)_n$ une suite de matrices dans H qui converge vers $B \in M_n(\mathbb{R})$.

c. (i) Montrer que pour tout n il existe $V_n \in S$ tel que $\|A_n V_n\| = 1$.

(ii) Montrer que la suite de vecteurs $(V_n)_n$ admet une sous-suite $(V_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un vecteur $W \in S$.

(iii) Montrer que $\|BW\| = 1$.

d. Montrer que H est fermé.

Exercice 5. *(Rattrapage 2012-2013)*
On considère les sous-ensembles suivants de $M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{P} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\},$$
$$\mathcal{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\},$$
$$\mathcal{O} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}.$$

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $N_1 : M = (M_{ij})_{ij} \mapsto \sum_{ij} |M_{ij}|$.

a. (i) Montrer que l'application $c : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$ est continue.

(ii) Montrer que $\mathcal{P}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

On admettra que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{O}$ sont également des fermés de $M_n(\mathbb{R})$.

b. (i) Pour $M = (M_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$, écrire les n^2 équations scalaires correspondant à l'identité matricielle ${}^tMM = I_n$.

(ii) Montrer que pour $M \in \mathcal{O}$ on a $N_1(M) \leq n^2$.

c. Le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset M_n(\mathbb{R})$ est-il borné relativement à N_1 ? *On pourra considérer les matrices dont la première ligne est de la forme* $(1, x, 0, \dots, 0)$*, et dont les autres lignes sont nulles.*

d. Soit N' une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que l'inégalité $N'(AB) \leq N'(A)N'(B)$ soit vérifiée pour toutes matrices A, $B \in M_n(\mathbb{R})$.
(Par exemple N' pourrait être la norme correspondant à une norme d'opérateur sur $L(\mathbb{R}^n)$.)
   (i) Montrer qu'il existe des constantes α, $\beta > 0$ telles que $\alpha N_1(M) \leq N'(M) \leq \beta N_1(M)$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$.
   (ii) En déduire qu'il existe une constante γ telle que $N_1(AB) \leq \gamma N_1(A) N_1(B)$ pour toutes matrices A, $B \in M_n(\mathbb{R})$.

e. On rappelle que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormée : en particulier, toute matrice $M \in \mathcal{S}$ peut s'écrire $M = {}^tODO$ avec $O \in \mathcal{O}$ et D diagonale.
On fixe $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ et on écrit $M = {}^tODO$ comme ci-dessus.
   (i) Montrer que $N_1(M) \leq \gamma^2 n^4 N_1(D)$.
   (ii) Sachant que $M \in \mathcal{P}$, que peut-on dire des éléments diagonaux de D ?
   (iii) Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est borné relativement à N_1.

f. Parmi les sous-ensembles $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$, lesquels sont des compacts de $M_n(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable dont tous les *moments* $m_n(f) = \int_a^b f(t) t^n \mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$, sont nuls.

a. Montrer que $\int_a^b f(t) P(t) \mathrm{d}t = 0$ pour tout polynôme P.
b. Montrer que si f est un polynôme, $f = 0$.
c. Montrer que si f est continue, $f = 0$.

Exercice 7. *(Rattrapage 2012-2013)*
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme du sup $N_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.
On considère les sous-espaces suivants de E :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\},$$
$$G = \{P : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ polynomiale}\}.$$

a. On fixe $f \in F$.
   (i) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $P_n \in G$ qui converge vers f pour N_∞.
   (ii) Montrer qu'on a alors $\lim_{n \to \infty} P_n(0) = 0$.
   (iii) Trouver une suite de polynômes $Q_n \in G \cap F$ qui converge vers f pour N_∞.
   (iv) Montrer que $F \cap G$ est dense dans F.

b. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire bornée. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq 1)$ on a $\varphi(X^n) = 0$, où X^n désigne la fonction polynomiale $(t \mapsto t^n)$, et que $\varphi(1_E) = 1$, où 1_E est la fonction constante $(t \mapsto 1)$.
   (i) Montrer que φ s'annule sur $F \cap G$.
   (ii) En déduire que φ s'annule sur F.
   (iii) Montrer qu'on a $\varphi(f) = f(0)$ pour toute $f \in E$.

Exercice 8. *(Rattrapage 2011-2012)*
On note E l'espace des fonction continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On considère les sous-ensembles suivants de E :

$$F = \{P : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale}\},$$
$$E_+ = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \forall t \in [0,1] \;\; f(t) \geq 0\},$$
$$F_+ = \{P : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ polynômiale} \mid \forall t \in [0,1] \;\; P(t) \geq 0\}.$$

a. Pour $f \in E$ on définit $\tilde{f} \in E$ en posant $\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(|f(t)| - f(t))$.
Montrer que $\tilde{f}$ appartient à E_+ pour toute fonction $f \in E$.
Montrer que $f(t)\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(t)^2$ pour tout $t \in [0,1]$ et toute fonction $f \in E$.

b. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\int_0^1 f(t) g(t) \mathrm{d}t \geq 0$ pour toute fonction $g \in E_+$.
Montrer que $f \in E_+$. *On pourra utiliser la fonction $\tilde{f}$.*

c. Soit f un élément de E_+, et $(P_n)_n$ une suite de polynômes $P_n \in F$ qui converge vers f.
On pose $m_n = \inf_{t \in [0,1]} P_n(t)$ et $c_n = \min(m_n, 0)$.
   (i) Montrer que $P_n - c_n$ appartient à F_+.
   (ii) Montrer que $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.
   (iii) Montrer que F_+ est dense dans E_+.

d. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\int_0^1 f(t) g(t) \mathrm{d}t \geq 0$ pour toute fonction $g \in F_+$.
Montrer que $f \in E_+$.