Sous-espaces

Exercice 1. Donner une base et des équations pour décrire les sous-espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}, \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - y + z = 0 \text{ et} \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\},$$

$$E_3 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_4 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_5 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_6 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 2. Décrire $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$ pour

$$E_1 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quelle relation y a-t-il entre $\dim(E_1 \cap E_2)$ et $\dim(E_1 + E_2)$?
Même question pour

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \text{ et} \\ z - t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x + z + t = 0 \text{ et} \\ -2y + 5z = 0 \end{array} \right\}.$$

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donne une base de $\operatorname{Ker} A$. Calculer le rang de A. Donner une base de $\operatorname{Im} A$. Décrire $\operatorname{Im} A$ par des équations.
Faire de même pour ${}^tA$, puis pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 5 & -17 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$