ORTHOGONALITÉ

Exercice 1. Calculer les orthogonaux des sous-espaces suivants :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - y + z = 0 \text{ et} \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\},$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x + z + t = 0 \text{ et} \\ -2y + 5z = 0 \text{ et} \\ -2x - 2y + 7z + 2t = 0 \end{array} \right\}.$$

Exercice 2. On considère les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - t = 0 \right\},$$

$$H_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + z + t = 0 \right\}.$$

Donner la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Même question en remplaçant H_2 par

$$H_2' = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 4. On considère une matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.

a. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. En calculant ${}^tXAX$ de deux façons, montrer que $\lambda = 0$.

b. On suppose A inversible. Montrer que n est nécessairement pair.

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, A$ sont deux sous-espaces orthogonaux. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A$.

b. On suppose que de plus $A^2 = A$.
   (i) Montrer que $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Ker}(A - I_n)$.
   (ii) En déduire que A est diagonalisable.

c. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de norme 1.
   (i) Montrer que $A = X_0{}^tX_0$ vérifie les hypothèses des questions précédentes.
   (ii) Déterminer $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, A$.

d. Inversement, soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 telle que ${}^tA = A = A^2$. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 tel que $A = X_0{}^tX_0$.