Convexité

Exercice 1.

a. Soit C, D des convexes de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ respectivement, et $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Montrer que $A(C)$ et $A^{-1}(D)$ sont des convexes. *On peut généraliser aux applications affines.*

b. Application : soit $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $A = {}^tBB$ et $C = \{X \in \mathbb{R}^n \mid {}^tXAX \leq 1\}$. Montrer que C est convexe.

Exercice 2. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$:

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 7 \right\}, \quad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (2x+y)^2 + 2(y-z)^2 \leq 1 \right\}$$

$$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz \leq 4 \right\}, \quad C_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2xy \leq 1 \right\}.$$

Montrer que C_1, C_2, C_3 sont des convexes. Représenter C_4 dans le plan. Est-ce un convexe ?

Exercice 3. On considère les sous-ensembles suivants du plan :

$$C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \right\},$$

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \geq -3, y - x \leq 2, x \leq 1 \right\},$$

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + y \geq 1, x - 3y \leq 2, x + 2y \leq 2 \right\}.$$

a. Justifier que C_0, C_1, C_2 sont des convexes. Les représenter dans le plan et donner leurs points extrémaux.

b. Trouver des applications affines f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que $f(C_0) = C_1$, $g(C_0) = C_2$.

Exercice 4.

a. Soit f_1, $f_2 : C \to \mathbb{R}$ convexes. Montrer que $\max(f_1, f_2)$ est convexe.
Est-ce encore le cas pour le max de n fonctions convexes ?

b. Montrer que la fonction suivante est convexe :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x-5 & \text{si } x \leq -5 \\ 0 & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ x-5 & \text{si } 5 \leq x. \end{cases}$$

c. Soit $A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction suivante est convexe :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \max_{1 \leq i \leq p} \left({}^tA_iX + b_i \right).$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, X \mapsto {}^tXAX$.

a. À quelle condition sur A la fonction f est-elle convexe ?

b. Est-ce le cas pour les matrices suivantes ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'épigraphe $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq f(x) \right\}$ est convexe.
Est-ce encore vrai pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe ?

b. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f^{-1}\left(]-\infty, c]\right)$ est convexe pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit a_i, b_i des réels positifs pour $i = 1, \dots, n$. On fixe des réels p, $q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En écrivant l'inégalité de convexité pour la fonction $(x \mapsto x^p)$, les points $x_i = a_i b_i^{1-q}$ et les coefficients $t_i = b_i^q$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Comment s'appelle l'inégalité obtenue lorsque $p = q = 2$?

Exercice 8. Vérifier que les fonctions f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données par les formules suivantes sont convexes, et déterminer leur minimum :

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 3y^2 + 12y, \quad g(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y.$$

Exercice 9. On considère

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq e^x \right\} \quad \text{et} \quad f : C \to \mathbb{R}, \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - ex.$$

a. Montrer que f n'atteint pas de minimum local à l'intérieur de C.

b. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = e^x$ en $(1, e)$.
Quelle est la position de C par rapport à cette droite ?
En déduire $\min_C f$.

c. On considère maintenant $g(x,y) = ey - x$.
Trouver le point de la courbe $y = e^x$ en lequel la tangente a pour pente $\frac{1}{e}$.
En déduire $\min_C g$.